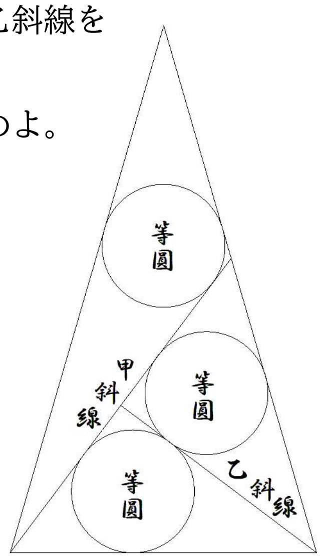
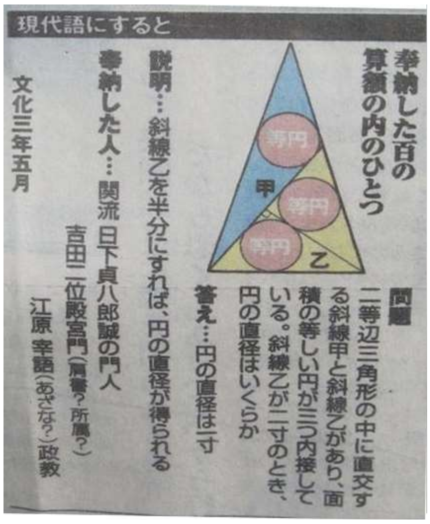
第 360 回

二等辺三角形内に直交する甲斜線と乙斜線を引き，図のように等円 3 個を入れる。
乙斜線が二寸のとき，円の直径を求めよ。




現代語にすると

奉納した百の算額の内のひとつ

問題

二等辺三角形の中に直交する斜線甲と斜線乙があり、面積の等しい円が三つ内接している。斜線乙が二寸のとき、円の直径はいくらか

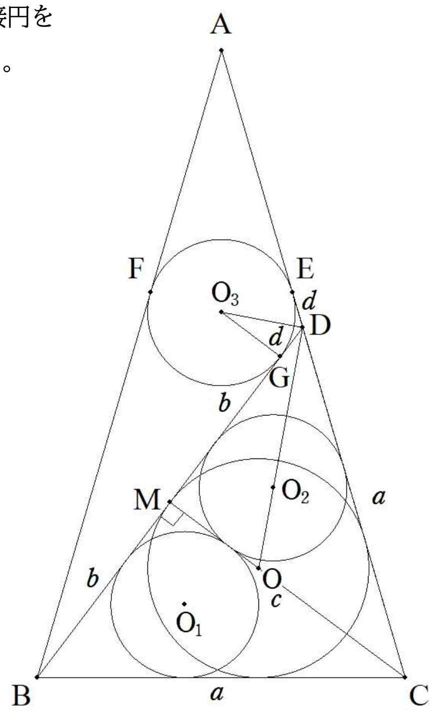
答え…円の直径は一寸

説明…斜線乙を半分にすれば、円の直径が得られる

奉納した人…関流 日下貞八郎誠の門人
吉田二位殿宮門（肩書？所属？）
江原 宰語（あざな？）政教

文化三年五月

解答　図のように記号を付け，等円を$O_1(r)$，$O_2(r)$，$O_3(r)$，△BCD の内接円を$O(R)$とし，BC=CD= a，BM=MD= b，CM= c，DE=DG= d とおく。



△BCM は直角三角形であるから，$a^2=b^2+c^2$　…①

また，△BCMの内接円の半径がrであるから，$a=b+c-2r$　…②

②を①に代入すると，$(b+c-2r)^2=b^2+c^2$　$\therefore b=\dfrac{2r(c-r)}{c-2r}$　…③

$\triangle\mathrm{BCD}=\dfrac{1}{2}\mathrm{BD}\cdot\mathrm{CM}=\dfrac{1}{2}\cdot 2b\cdot c=bc$　…④

△BCD の面積を R を用いて表すと，

$\triangle\mathrm{BCD}=\dfrac{1}{2}R(2a+2b)=R(a+b)=R(2b+c-2r)$　(∵②)　…⑤

⑤，④より，$R(2b+c-2r)=bc$　$\therefore R=\dfrac{bc}{2b+c-2r}$

これに③を代入すると，$R=\dfrac{\dfrac{2r(c-r)}{c-2r}\cdot c}{2\cdot\dfrac{2r(c-r)}{c-2r}+c-2r}=\dfrac{2r(c-r)}{c}$　…⑥

$\triangle\mathrm{DMO}\backsim\triangle\mathrm{O_3GD}$であるから，$\dfrac{R}{b}=\dfrac{d}{r}$　$\therefore rR=bd$　…⑦

ここで，$d=\mathrm{GD}=\mathrm{BD}-\mathrm{BG}=\mathrm{BD}-\mathrm{BF}=\mathrm{BD}-\mathrm{CE}=2b-(a+d)=2b-(b+c-2r+d)$（∵②）

$\therefore d=\dfrac{b-c+2r}{2}=\dfrac{\dfrac{2r(c-r)}{c-2r}-c+2r}{2}$（∵③）$=\dfrac{-c^2+6cr-6r^2}{2(c-2r)}$　…⑧

⑦に⑥，③，⑧を代入すると，$r\cdot\dfrac{2r(c-r)}{c}=\dfrac{2r(c-r)}{c-2r}\cdot\dfrac{-c^2+6cr-6r^2}{2(c-2r)}$

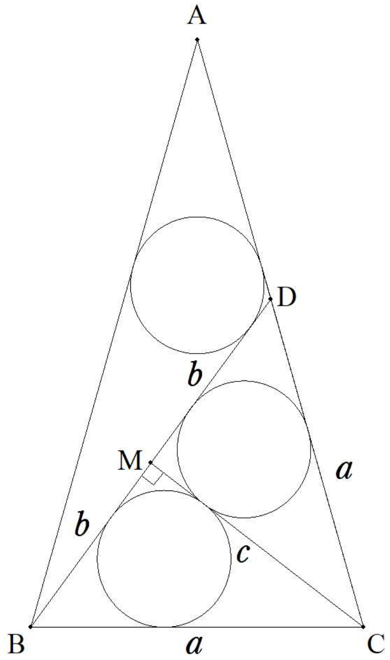
分母を払い，整理すると，$(c-4r)(c^2-2r^2)=0$　$\therefore c=4r$，$\pm\sqrt{2}\,r$

$c>2r$ より，$c=4r$　∴等円の直径は，$2r=\dfrac{1}{2}c$　よって，斜線乙＝ c =2 寸のとき，等円の直径は一寸である。 答

補足　CM= $4r$ のとき，BM=MD= $3r$，BC=CD= $5r$，AB=AC= $\dfrac{125}{14}r$，$R=\dfrac{3}{2}r$　(2021/7/5)

別解

図のように記号を付け，BC＝CD＝ a ，BM＝MD＝ b ，CM＝ c とおく。



△BCM は直角三角形であるから， $a^2=b^2+c^2$ …①

また，△BCM の内接円の半径を r とすると， $r=\dfrac{b+c-a}{2}$ …②

△BCM において， $\cos\dfrac{C}{2}=\cos\angle BCM=\dfrac{c}{a}$ より，

$\cos C=2\cos^2\dfrac{C}{2}-1=2\left(\dfrac{c}{a}\right)^2-1=\dfrac{2c^2-a^2}{a^2}=\dfrac{c^2-b^2}{c^2+b^2}$ （∵①） …③

AB＝AC＝ $\dfrac{\frac{a}{2}}{\cos C}=\dfrac{a(c^2+b^2)}{2(c^2-b^2)}$ ，

AD＝AC－DC＝ $\dfrac{a(c^2+b^2)}{2(c^2-b^2)}-a=\dfrac{a(3b^2-c^2)}{2(c^2-b^2)}$

△ABC＝ $\dfrac{1}{2}a\sqrt{AB^2-\left(\dfrac{a}{2}\right)^2}=\dfrac{1}{2}a\sqrt{\left\{\dfrac{a(c^2+b^2)}{2(c^2-b^2)}\right\}^2-\left(\dfrac{a}{2}\right)^2}=\dfrac{a^2bc}{2(c^2-b^2)}$

△ABD＝ $\dfrac{AD}{AC}$・△ABC＝ $\dfrac{3b^2-c^2}{c^2+b^2}\cdot\dfrac{a^2bc}{2(c^2-b^2)}=\dfrac{bc(3b^2-c^2)}{2(c^2-b^2)}$ （∵①）

△ABD について，周の長さを $2s$ とおくと，

$2s$ ＝BD＋DA＋AB＝ $2b+\dfrac{a(3b^2-c^2)}{2(c^2-b^2)}+\dfrac{a(c^2+b^2)}{2(c^2-b^2)}=\dfrac{2b(ab+c^2-b^2)}{c^2-b^2}$

△ABD の内接円の半径 r は， $r=\dfrac{\triangle ABD}{s}=\dfrac{\frac{bc(3b^2-c^2)}{2(c^2-b^2)}}{\frac{b(ab+c^2-b^2)}{c^2-b^2}}=\dfrac{c(3b^2-c^2)}{2(ab+c^2-b^2)}$ …④

②，④より， $\dfrac{b+c-a}{2}=\dfrac{c(3b^2-c^2)}{2(ab+c^2-b^2)}$

分母を払って整理すると， $a^2b+b^3+4b^2c-bc-2c^3=(2b^2+bc-c^2)a$

左辺に①を代入すると， $(b^2+c^2)b+b^3+4b^2c-bc^2-2c^3=(2b^2+bc-c^2)a$

$\therefore 2b^3+4b^2c-2c^3=(2b^2+bc-c^2)a$ ， $2(b+c)(b^2+bc-c^2)=(b+c)(2b-c)a$

両辺を $b+c(\neq 0)$ で割ると， $2(b^2+bc-c^2)=(2b-c)a$

両辺を 2 乗して移項し，①を代入すると， $4(b^2+bc-c^2)^2-(2b-c)^2(b^2+c^2)=0$

整理すると， $c(4b-3c)(3b^2-c^2)=0$ 　題意に適するのは， $b=\dfrac{3}{4}c$

このとき，①より， $a=\dfrac{5}{4}c$ ，②より， $r=\dfrac{\frac{3}{4}c+c-\frac{5}{4}c}{2}=\dfrac{1}{4}c$

∴等円の直径は， $2r=\dfrac{1}{2}c$ 　よって，斜線乙＝ c ＝2 寸のとき，等円の直径は一寸である。 答

（2021/7/6　ジョーカー）