第 388 回

箱の中に 1 から N までの番号が 1 つずつ書かれた N 枚のカードが入っている。この箱から無作為にカードを 1 枚取り出して戻すという試行を k 回行う。このとき，はじめから j 回目 ($j=1,\ 2,\ \cdots,\ k$) までに取り出したカードの番号の和を X_j とし， X_1， X_2，…， X_k のうちのどれかが k となる確率を $P_N(k)$ とする。

(1)　N $\geqq 3$ のとき， $P_N(1)$， $P_N(2)$， $P_N(3)$ を N で表せ。

(2)　$P_3(4)$， $P_3(5)$ を求めよ。

(3)　$k \leqq$ N のとき， $P_N(k)$ を N と k で表せ。

解答

(1)　第 i 回目に取り出した番号を $x_i\ (1 \leqq x_i \leqq N)$ とすると， $X_j = x_1 + x_2 + \cdots + x_j$ であるから， $X_j \geqq j$ である。
したがって,

$$P_N(1) = P(X_1=1) = \frac{1}{N} \quad \text{答}$$

$$P_N(2) = P(X_1=2\text{または}X_2=2) = P(X_1=2) + P(X_2=2) = \frac{1}{N} + \frac{1}{N^2} = \frac{N+1}{N^2} \quad \text{答}$$

$$P_N(3) = P(X_1=3\text{または}X_2=3\text{または}X_3=3) = P(X_1=3) + P(X_2=3) + P(X_3=3) = \frac{1}{N} + \frac{2}{N^2} + \frac{1}{N^3}\ (*1)$$

$$= \frac{(N+1)^2}{N^3}$$

(*1)

$X_1=3$ となるのは， $x_1=3$ の 1 通り。

$X_2=3$ となるのは， $x_1+x_2=3$ より，$(x_1,\ x_2)=(1,\ 2),\ (2,\ 1)$ の 2 通り。

$X_3=3$ となるのは， $x_1+x_2+x_3=3$ より，$(x_1,\ x_2,\ x_3)=(1,\ 1,\ 1)$ の 1 通りであるから。

(2)　1 から 3 までの番号が 1 つずつ書かれた 3 枚のカードから取り出す場合， $X_1=4$， $X_1=5$ はありえないので，(1) と同様に考えて,

$$P_3(4) = P(X_2=4) + P(X_3=4) + P(X_4=4) = \frac{3}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{1}{3^4}\ (*2)$$

$$= \frac{37}{81} \quad \text{答}$$

(*2)

$X_2=4$ となるのは， $x_1+x_2=4$ より，$(x_1,\ x_2)=(1,\ 3),\ (2,\ 2),\ (3,\ 1)$ の 3 通り。

$X_3=4$ となるのは， $x_1+x_2+x_3=4$ より，$(x_1,\ x_2,\ x_3)=(1,\ 1,\ 2),\ (1,\ 2,\ 1),\ (2,\ 1,\ 1)$ の 3 通り。

$X_4=4$ となるのは， $x_1+x_2+x_3+x_4=4$ より，$(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)=(1,\ 1,\ 1,\ 1)$ の 1 通りであるから。

$$P_3(5) = P(X_2=5) + P(X_3=5) + P(X_4=5) + P(X_5=5) = \frac{2}{3^2} + \frac{6}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \frac{1}{3^5}\ (*3)$$

$$= \frac{121}{243} \quad \text{答}$$

(*3)

$X_2=5$ となるのは， $x_1+x_2=5$ より，$(x_1,\ x_2)=(2,\ 3),\ (3,\ 2)$ の 2 通り。

$X_3=5$ となるのは， $x_1+x_2+x_3=5$ より,

$(x_1,\ x_2,\ x_3)=(1,\ 1,\ 3),\ (1,\ 3,\ 1),\ (3,\ 1,\ 1),\ (1,\ 2,\ 2),\ (2,\ 1,\ 2),\ (2,\ 2,\ 1)$ の 6 通り。

$X_4=5$ となるのは，$x_1+x_2+x_3+x_4=5$ より，

$(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)=(1,\ 1,\ 1,\ 2),\ (1,\ 1,\ 2,\ 1),\ (1,\ 2,\ 1,\ 1),\ (2,\ 1,\ 1,\ 1)$ の4通り。

$X_5=5$ となるのは，$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=5$ より，$(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)=(1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1)$ の1通りであるから。

(3)　$k \leqq N$ のとき，$P_N(k)=P(X_1=k)+P(X_2=k)+\ \cdots+P(X_k=k)$

ここで，1以上 k 以下の j に対して，

$X_j=k \Leftrightarrow x_1+x_2+\cdots x_j=k \Leftrightarrow y_1+y_2+\cdots+y_j=k-j \cdots$①（ただし，$y_i=x_i-1$，$1 \leqq i \leqq j$）

であり，①を満たす非負整数解 $(y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_j)$ の個数は重複組合せ(∗4) であるから，${}_jH_{k-j}={}_{k-1}C_{k-j}$（通り）ある。

よって，

$$P_N(k)=\sum_{j=1}^{k}P(X_j=k)=\sum_{j=1}^{k}\frac{{}_{k-1}C_{k-j}}{N^j}=\frac{1}{N^k}\sum_{j=1}^{k}{}_{k-1}C_{k-j}N^{k-j}=\frac{1}{N^k}\sum_{r=0}^{k-1}{}_{k-1}C_rN^r=\frac{(1+N)^{k-1}}{N^k}\quad (\because 二項定理より)$$

$$=\frac{(N+1)^{k-1}}{N^k}$$ 答

(∗4)

（n 個の相異なるものの中から同種のものを繰り返してとることを許して r 個ずつとってつくる組合せの総数を n 個のものから r 個取る重複組合せといい，${}_nH_r$ で表す。${}_nH_r={}_{n+r-1}C_r$ である。）

①の分かりやすい例えとして，$(k-j)$ 個のリンゴを1個ももらわない人がいてもいいとして，j 人に分ける方法の数に等しい。そのためには，$(k-j)$ 個のリンゴを一列に並べ，仕切りを $(j-1)$ 個入れればよいから，その数は全部で，${}_{(k-j)+(j-1)}C_{j-1}={}_{k-1}C_{k-j}$（通り）となる。

(2020/7/11　ジョーカー)