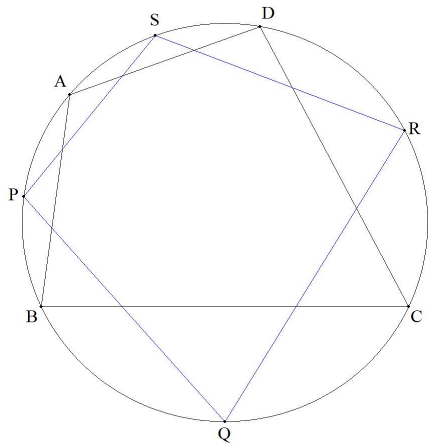
第 388 回　追加問題

四角形 ABCD は AB= a，BC= b，CD= c，DA= d で，円に内接している。弧 AB，BC，CD，DA の中点をそれぞれ P，Q，R，S とするとき，（四角形 PQRS）/（四角形 ABCD）の値を求めよ。

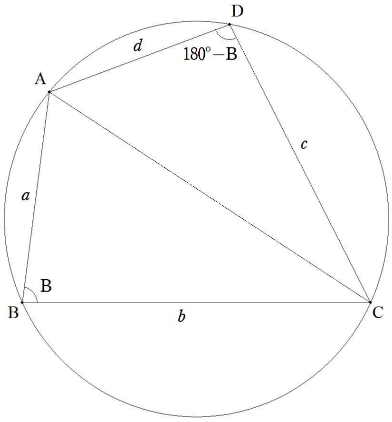


解答　四角形 ABCD= S，四角形 PQRS= S' とおく。

△ABC と△ADC において，∠B+∠D=180° であるから，

$$AC^2=a^2+b^2-2ab\cos B=c^2+d^2+2cd\cos B \quad \cdots①$$

$\cos B$ について解くと，$\cos B=\dfrac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)} \quad \cdots②$



$$\sin^2 B=1-\cos^2 B=(1-\cos B)(1+\cos B)$$
$$=\left\{1-\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}\right\}\left\{1+\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}\right\}$$
$$=\frac{(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)}{4(ab+cd)^2}$$

ここで，$\dfrac{a+b+c+d}{2}=s$ とおくと，

$$\sin^2 B=\frac{(2s-2a)(2s-2b)(2s-2c)(2s-2d)}{4(ab+cd)^2}$$

$\sin B>0$ より，$\sin B=\dfrac{2\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}}{ab+cd} \quad \cdots③$

よって，$S=△ABC+△ADC=\dfrac{1}{2}(ab+cd)\sin B=\dfrac{1}{2}(ab+cd)\cdot\dfrac{2\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}}{ab+cd}$

$$=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)} \quad \cdots④$$

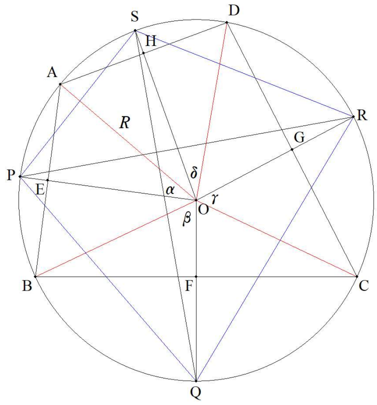
次に，①，②より $\cos B$ を消去すれば，AC= $\sqrt{\dfrac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}}$

③，④より，$\sin B=\dfrac{2S}{ab+cd}$

△ABCにおいて，正弦定理により，

$$2R=\frac{AC}{\sin B}=\frac{\sqrt{\dfrac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}}}{\dfrac{2S}{ab+cd}}=\frac{\sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}}{2S}$$

よって，$R=\dfrac{\sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}}{4S} \quad \cdots⑤$



図のように記号を付け，∠AOS=∠AOP=α，∠BOP=∠BOQ=β，∠COQ=∠COR=γ，∠DOR=∠DOS=δ とおくと，

$\sin\alpha=\dfrac{a}{2R}$ ， $\sin\beta=\dfrac{b}{2R}$ ， $\sin\gamma=\dfrac{c}{2R}$ ， $\sin\delta=\dfrac{d}{2R}$ ，

$\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{4R^2-a^2}}{2R}$ ， $\cos\beta=\dfrac{\sqrt{4R^2-b^2}}{2R}$ ， $\cos\gamma=\dfrac{\sqrt{4R^2-c^2}}{2R}$ ， $\cos\delta=\dfrac{\sqrt{4R^2-d^2}}{2R}$ である。

PR と QS のなす角は，弧 PS と弧 RQ の和に立つ円周角に等しい。

弧の和は半円になるから，PR⊥QSより，$S'=\dfrac{1}{2}\,\mathrm{PR}\cdot\mathrm{QS}$ …⑥

△ORP に余弦定理を適用して，

$$\mathrm{PR}^2=2R^2-2R^2\cos(\alpha+\gamma+2\delta)=2R^2-2R^2\cos(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\delta-\beta)=2R^2+2R^2\cos(\delta-\beta)$$

$$=2R^2(1+\cos\delta\cos\beta+\sin\delta\sin\beta)=2R^2\left(1+\frac{\sqrt{4R^2-d^2}}{2R}\cdot\frac{\sqrt{4R^2-b^2}}{2R}+\frac{d}{2R}\cdot\frac{b}{2R}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(4R^2+bd+\sqrt{4R^2-b^2}\sqrt{4R^2-d^2}\right)$$

これに，⑤からの $R^2=\dfrac{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}{(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)}$ を代入すると（計算省略），

$\mathrm{PR}^2=\dfrac{(b+d)^2(ac+bd)}{(-a+b+c+d)(a+b-c+d)}$　同様に，$\mathrm{QS}^2=\dfrac{(a+c)^2(ac+bd)}{(a-b+c+d)(a+b+c-d)}$

⑥より，

$$S'=\frac{1}{2}\cdot\frac{(b+d)\sqrt{ac+bd}}{\sqrt{(-a+b+c+d)(a+b-c+d)}}\cdot\frac{(a+c)\sqrt{ac+bd}}{\sqrt{(a-b+c+d)(a+b+c-d)}}=\frac{(a+c)(b+d)(ac+bd)}{8S^2}S$$

よって，$\dfrac{S'}{S}=\dfrac{(a+c)(b+d)(ac+bd)}{8S^2}=\dfrac{2(a+c)(b+d)(ac+bd)}{(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)}$　答

例

$a=4,\ b=6,\ c=5,\ d=3$ のとき，$\dfrac{S'}{S}=\dfrac{171}{160}$

（2020/7/11　ジョーカー）