第389回「二項係数」

二項係数とは，$(1+x)^n$ の展開における x^k の項の係数のことです。これを ${}_nC_k$（$0 \leqq k \leqq n$， n，k は非負整数）と表します。

問題 1　係数 ${}_nC_k$ がすべて奇数のときは， n はどんな数か。

問題 2　係数 ${}_{383}C_k$ が初めて偶数となる k を求めよ。

問題 3　$n+1$ を 2 進法で表したとき，係数 ${}_nC_k$ が初めて偶数となる k を考察してください。

問題 1　パスカルの三角形において，奇数を 1，偶数を 0 とすると，図 1 のようになる。奇数が並ぶ行の n は，

$n=\{0,\ 1,\ 3,\ 7,\ 15,\ \cdots\}=\{2^0-1,\ 2^1-1,\ 2^2-1,\ 2^3-1,\ 2^4-1,\ \cdots\}=\{2^k-1 \mid k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\}$ より，

$n=2^k-1$（$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$）と表される。

パスカルの三角形（奇数は1，偶数は0で示している）

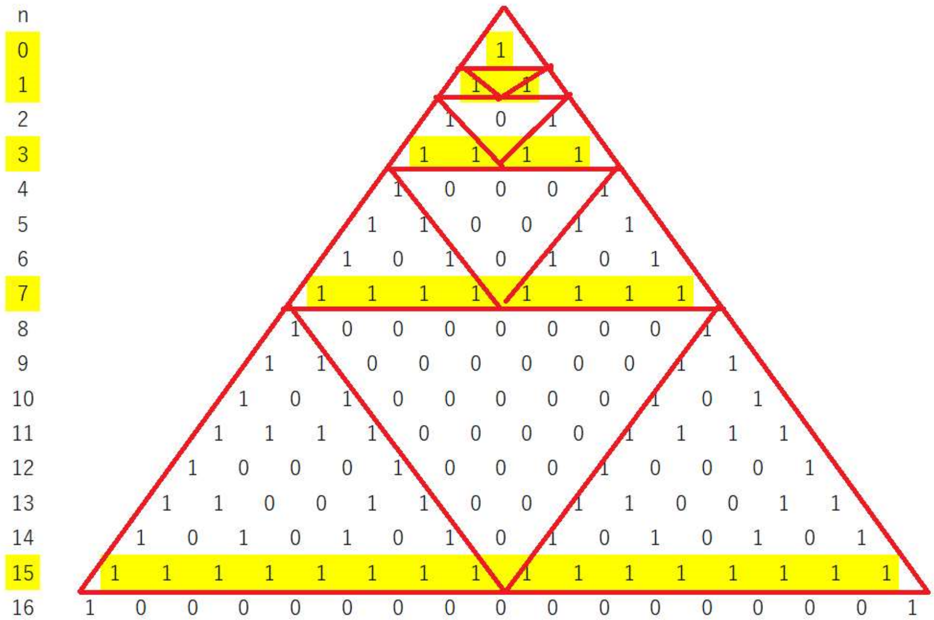

図 1

問題 2　問題 3 に 2 進法というキーワードがあるので，383 を 2 進法で表してみると，$383=(101111111)_2$ となる。

10 の後ろに 1 が 7 個並んでいる。この並んでいる 1 の部分に着目して，

$(101)_2$，$(1011)_2$，$(10111)_2$，$(101111)_2$，$(1011111)_2$，$(10111111)_2$ を計算すると，

順に，5，11，23，47，95，191 となる。

パスカルの三角形について，これらの数の行に着目して，初めて偶数が現れる k の値を調べると，

5 行目は， $k=2$，11 行目は， $k=4=2^2$，23 行目は， $k=8=2^3$（ここまでは下図で確かめられる。），

47 行目は， $k=16=2^4$，95 行目は， $k=32=2^5$，191 行目は， $k=64=2^6$，383 行目は， $k=128=2^7$

よって，係数 ${}_{383}C_k$ が初めて偶数となる k の値は， $k=128$ と推測できる。

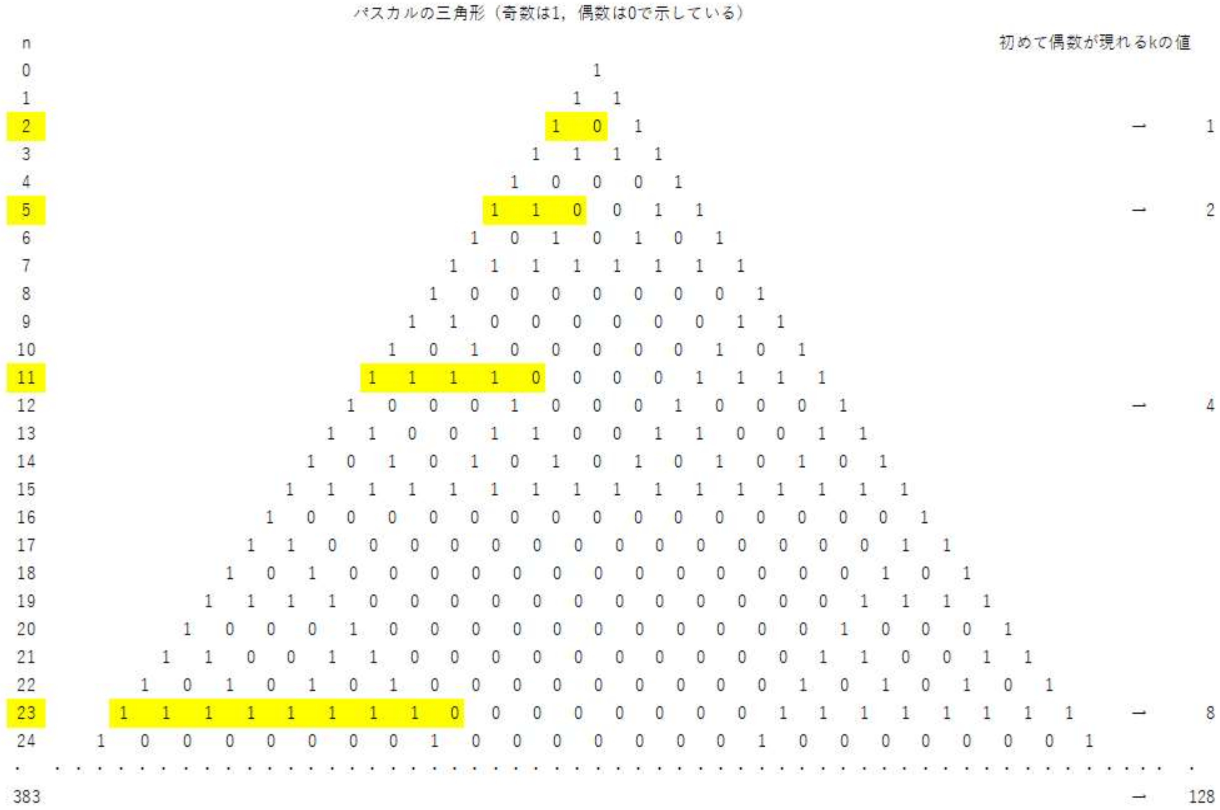

図 2

問題 3

問題 2 より，パスカルの三角形の $5=(101)_2$，$11=(1011)_2$，$23=(10111)_2$，… 行のときは，初めて偶数となる k の値は，2^1，2^2，2^3，… となる。

2 進数 $(1011\cdots1)_2$ について，10 の後ろに 1 が r 個並ぶときの n を求める。

$$(1011\cdots1)_2=1\times2^{r+1}+0\times2^2+1\times2^{r-1}+1\times2^{r-2}+\cdots+1\times2+1=2^{r+1}+\frac{2^r-1}{2-1}=3\cdot2^r-1$$

よって，$n=(1011\cdots1)_2=3\cdot2^r-1$ のとき，初めて偶数となる k の値は，$k=2^r$ （$r=0,\ 1,\ \cdots$）

$n\fallingdotseq3\cdot2^r-1$ のときは，図 2 より，初めて偶数となる k の値は，

$n=2r$ のとき，$n+1=2^0(2r+1)$ である。このとき，$k=1=2^0$ （$r=1,\ 2,\ \cdots$）

$n=4r+1$ のとき，$n+1=2^1(2r+1)$ である。このとき，$k=2=2^1$ （$r=1,\ 2,\ \cdots$）

$n=8r+3$ のとき，$n+1=2^2(2r+1)$ である。このとき，$k=4=2^2$ （$r=1,\ 2,\ \cdots$）

$n=16r+7$ のとき，$n+1=2^3(2r+1)$ である。このとき，$k=8=2^3$ （$r=1,\ 2,\ \cdots$）

……………………………………………………………………………………

※ $n+1$ を 2 進法で表していないが，初めて偶数となる k の値は上記の通りである。

${}_nC_r$ の偶奇判定法

$\mathrm{L}=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{n}{2^k}\right]-\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{r}{2^k}\right]+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{n-r}{2^k}\right)$ とおくと，

$\mathrm{L}=0 \Leftrightarrow {}_nC_r$ は奇数，$\mathrm{L}>0 \Leftrightarrow {}_nC_r$ は偶数

証明　[ ] をガウス記号とすると，$n!$ の 2 の因数の個数は $\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{n}{2^k}\right]$ で求められるから，

${}_nC_r$ は奇数 $\Leftrightarrow \frac{n!}{r!(n-r)!}$ は奇数 $\Leftrightarrow n!$ の 2 の因数の個数と $r!(n-r)!$ の 2 の因数の個数が等しい。

$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{n}{2^k}\right]-\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{r}{2^k}\right]+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{n-r}{2^k}\right]\right)=0$

${}_nC_r$ は偶数 $\Leftrightarrow \frac{n!}{r!(n-r)!}$ は偶数 $\Leftrightarrow n!$ の 2 の因数の個数は $r!(n-r)!$ の 2 の因数の個数より大きい。

$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{n}{2^k}\right]-\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{r}{2^k}\right]+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{n-r}{2^k}\right]\right)>0$ 終

例

(1)　${}_{383}C_{127}=\frac{383!}{127!256!}$ について，$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{383}{2^k}\right]=191+95+47+23+11+5+2+1=375$，

$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{127}{2^k}\right]=63+31+15+7+3+1=120$，$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{256}{2^k}\right]=256+128+64+32+16+8+4+2+1=255$ であるから，

$375-(120+255)=0$ より，${}_{383}C_{127}$ は奇数

(2)　${}_{383}C_{128}=\frac{383!}{128!255!}$ について，$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{383}{2^k}\right]=191+95+47+23+11+5+2+1=375$，

$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{128}{2^k}\right]=64+32+16+8+4+2+1=127$，$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{255}{2^k}\right]=127+63+31+15+7+3+1=247$ であるから，

$375-(127+247)=1>0$ より，${}_{383}C_{127}$ は偶数

補足　${}_{383}C_{128}=$

407204441839401833315084302931394735591792679433665272661475138012699627086418284911935296241011549260618

（105 桁）

（2020/8/26　ジョーカー）