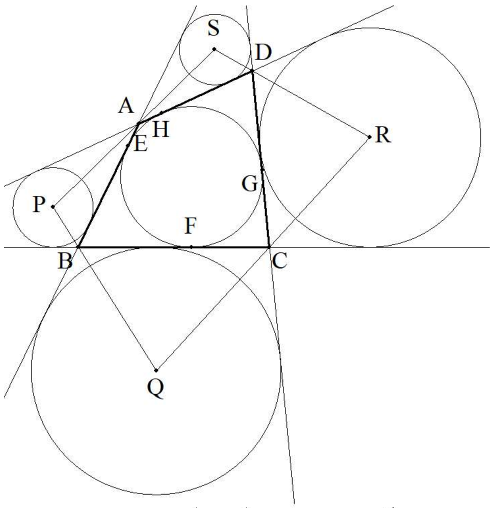
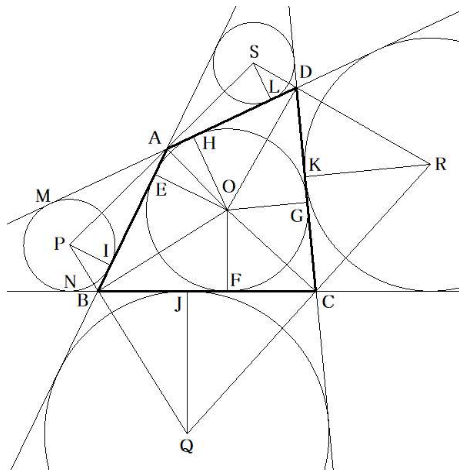
第389 回　追加問題　円に外接する四角形 ABCD に関する面積問題

四角形 ABCD は円に外接し，図のように その接点を E，F，G，H とし，AE＝a，BF＝b，CG＝c，DH＝d とする。図のように，四角形の辺あるいはその延長に接する 4 つの円の中心をそれぞれ P，Q，R，S とするとき，(四角形PQRS)/(四角形ABCD)の値を求めよ。



解答　四角形 ABCD＝S とし，P，Q，R，S からそれぞれ AB，BC，CD，DA に下した垂線の足を I，J，K，L とする。
四角形の内接円の中心を O，半径を r とし，円 P，Q，R，S の半径をそれぞれ r_1，r_2，r_3，r_4 とする。
四角形 ABCD の 4 つの内角をそれぞれ A，B，C，D とすると，



$\dfrac{A}{2}+\dfrac{B}{2}=180^\circ-\left(\dfrac{C}{2}+\dfrac{D}{2}\right)$ であるから，

$$\tan\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)=-\tan\left(\frac{C}{2}+\frac{D}{2}\right)$$

$$\frac{\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}}{1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}}=-\frac{\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{D}{2}}{1-\tan\frac{C}{2}\tan\frac{D}{2}}$$

分母を払って整理すると，

$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{D}{2}+\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}\tan\frac{D}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\tan\frac{D}{2}$$

$$-\tan\frac{A}{2}-\tan\frac{B}{2}-\tan\frac{C}{2}-\tan\frac{D}{2}=0$$

これに，$\tan\dfrac{A}{2}=\dfrac{r}{a}$，$\tan\dfrac{B}{2}=\dfrac{r}{b}$，$\tan\dfrac{C}{2}=\dfrac{r}{c}$，$\tan\dfrac{D}{2}=\dfrac{r}{d}$ を代入すると，

$$\frac{r}{a}\cdot\frac{r}{b}\cdot\frac{r}{c}+\frac{r}{a}\cdot\frac{r}{b}\cdot\frac{r}{d}+\frac{r}{a}\cdot\frac{r}{c}\cdot\frac{r}{d}+\frac{r}{b}\cdot\frac{r}{c}\cdot\frac{r}{d}-\frac{r}{a}-\frac{r}{b}-\frac{r}{c}-\frac{r}{d}=0$$

$r>0$ より，分母を払い移項すると，$(a+b+c+d)r^2=abc+acd+acd+bcd$

$$\therefore r=\sqrt{\frac{abc+acd+acd+bcd}{a+b+c+d}}$$

また，$S=(a+b+c+d)r=\sqrt{(a+b+c+d)(abc+acd+acd+bcd)}$，$rS=abc+abd+acd+bcd$ である。
ここで，AE＝BI を証明するために，円 P と直線 AD，BC との接点をそれぞれ M，N とする。
MH＝MA＋AH＝IA＋AE＝IE+2 AE，NF＝NB＋BF＝BI＋BE＝2 BI＋IE
MH＝NF より，IE+2 AE＝2 BI＋IE　∴AE＝BI

BI＝AE＝ a ，△BIP∽△OEB であるから， $\dfrac{r_1}{a}=\dfrac{b}{r}$ 　 $\therefore r_1=\dfrac{ab}{r}$

同様に，CF＝BJ＝ b ，△CJQ∽△OFC であるから， $r_2=\dfrac{bc}{r}$

同様に， $r_3=\dfrac{cd}{r}$ ， $r_4=\dfrac{da}{r}$ となる。

四角形 PQRS＝ S ＋△PBA＋△QCB＋△RDC＋△SAD

$$=S+\frac{1}{2}(a+b)r_1+\frac{1}{2}(b+c)r_2+\frac{1}{2}(c+d)r_3+\frac{1}{2}(d+a)r_4$$

$$=S+\frac{1}{2}(a+b)\cdot\frac{ab}{r}+\frac{1}{2}(b+c)\cdot\frac{bc}{r}+\frac{1}{2}(c+d)\cdot\frac{cd}{r}+\frac{1}{2}(d+a)\cdot\frac{da}{r}$$

$$=S+\frac{ab(a+b)+bc(b+c)+cd(c+d)+da(d+a)}{2r}=\frac{(a+c)(b+d)(a+b+c+d)}{2r}$$

$$=\frac{(a+c)(b+d)(a+b+c+d)}{2rS}S=\frac{(a+c)(b+d)(a+b+c+d)}{2(abc+abd+acd+bcd)}S$$

よって， $\dfrac{\text{四角形 } PQRS}{\text{四角形 } ABCD}=\dfrac{(a+c)(b+d)(a+b+c+d)}{2(abc+abd+acd+bcd)}$ 　答

(2020/7/26　ジョーカー)