第 395 回

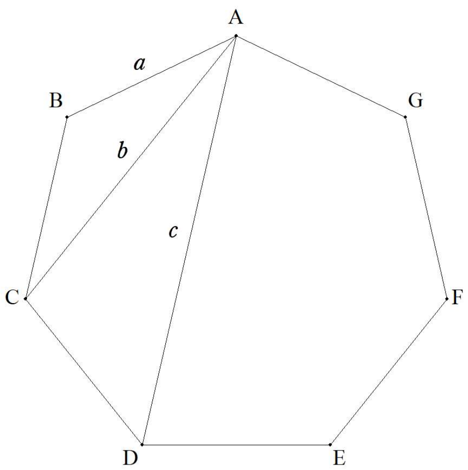
問題 1

1 辺の長さが a である正七角形の対角線のうち，短い方を b ，長い方を c とする。次の値を求めよ。

(1) $\dfrac{b^2}{a^2}+\dfrac{c^2}{b^2}+\dfrac{a^2}{c^2}$

(2) $\dfrac{a^2}{b^2}+\dfrac{b^2}{c^2}+\dfrac{c^2}{a^2}$

解答



(1) 図のように，正七角形に記号を付ける。

次の 4 つの四角形にそれぞれトレミーの定理を適用する。

[1] 四角形 ABCD について， $ac+a^2=b^2$ …①

[2] 四角形 ABDE について， $bc+a^2=c^2$ …②

[3] 四角形 ABDF について， $ab+b^2=c^2$ …③

[4] 四角形 ABCF について， $ab+ac=bc$

$\therefore bc-ab=ac$ …④

このとき，

$$\frac{b^2}{a^2}+\frac{c^2}{b^2}+\frac{a^2}{c^2}=\frac{ac+a^2}{a^2}+\frac{ab+b^2}{b^2}+\frac{c^2-bc}{c^2}\quad(\because ①,\ ②,\ ③より)$$

$$=\frac{c}{a}+1+\frac{a}{b}+1+1-\frac{b}{c}=3+\frac{bc+a^2}{ab}-\frac{b}{c}=3+\frac{c^2}{ab}-\frac{b}{c}\quad(\because ②より)$$

$$=3+\frac{ab+b^2}{ab}-\frac{b}{c}\quad(\because ③より)$$

$$=3+1+\frac{b}{a}-\frac{b}{c}=4+\frac{bc-ab}{ac}=4+\frac{ac}{ac}\quad(\because ④より)$$

$=5$ 答

(2) 同様に，

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}=\frac{c^2-bc}{b^2}+\frac{ac+a^2}{c^2}+\frac{ab+b^2}{a^2}\quad(\because ②,\ ①,\ ③より)$$

$$=\frac{b^2}{a^2}+\frac{c^2}{b^2}+\frac{a^2}{c^2}-\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}$$

ここで， $-\dfrac{c}{b}+\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{a}=-\dfrac{c^2-ab}{bc}+\dfrac{b}{a}=-\dfrac{b^2}{bc}+\dfrac{b}{a}\quad(\because ③より)$

$=-\dfrac{b}{c}+\dfrac{b}{a}=\dfrac{-ab+bc}{ac}=\dfrac{ac}{ac}\quad(\because ④より)$

$=1$ である。

よって，(1) の結果を利用して， $\dfrac{a^2}{b^2}+\dfrac{b^2}{c^2}+\dfrac{c^2}{a^2}=5+1=6$ 答

問題２　（一般化）

有理数を係数とする整式 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ は有理数の範囲で因数分解ができなく（$\mathbf{Q}$上既約），

$d=\sqrt{a^2b^2-4a^3c+18abc-4b^3-27c^2}$ が有理数であるとする。

このとき，方程式 $f(x)=0$ の１つの解を α とするとき，他の解を α の最低次の有理数を係数とする整式として表せ。

解答　$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$　…①において，$x=y-\dfrac{a}{3}$ とおくと，$g(y)=y^3+py+q$　…②となる。

ここに，$p=-\dfrac{a^2}{3}+b$，$q=\dfrac{2a^3}{27}-\dfrac{ab}{3}+c$ である。

方程式 $f(x)=0$ の３つの解を $\alpha_1=\alpha$，α_2，α_3，方程式 $g(x)=0$ の３つの解を $\beta_1=\beta$，β_2，β_3，$\alpha_i=\beta_i-\dfrac{a}{3}$

（$i=1,\ 2,\ 3$）とおく。

②を因数分解して，$(y-\beta)(y^2+\beta y+\beta^2+p)=0$ より，β_2，$\beta_3=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{-3\beta^2-4p}}{2}$

ここで，$\sqrt{-3\beta^2-4p}=A\beta^2+B\beta+C$（$A,\ B,\ C\in\mathbf{Q}$）とおき，両辺を２乗すると，

$-3\beta^2-4p=A^2\beta^4+2AB\beta^3+(2AC+B^2)\beta^2+2BC\beta+C^2$

$\qquad=(-pA^2+2AC+B^2)\beta^2+(-qA^2-2pAB+2BC)\beta-2qAB+C^2$　（$\because g(\beta)=\beta^3+p\beta+q=0$ より）

$1,\ \beta,\ \beta^2$ は $\mathbf{Q}$ 上 $lin.indep.$ より $(*)$，$\begin{cases}-pA^2+2AC+B^2=-3\cdots③\\-qA^2-2pAB+2BC=0\cdots④\\-2qAB+C^2=-4p\cdots⑤\end{cases}$

$B=0$ とおくと，④より，$A=0$。このとき，③は $0=-3$ となり不合理。

$\therefore B\neq 0$　④より，$C=\dfrac{qA^2+2pAB}{2B}$　…⑥

⑥を③に代入すると，$-pA^2+2A\cdot\dfrac{qA^2+2pAB}{2B}+B^2=-3$

分母を払って整理すると，$qA^3+pA^2B+B^3=-3B$　…⑦

同様に，⑥を⑤に代入すると，$-2qAB+\left(\dfrac{qA^2+2pAB}{2B}\right)^2=-4p$

分母を払って整理すると，$q^2A^4+4pqA^3B+4p^2A^2B^2-8qAB^3=-16pB^2$　…⑧

⑧×3−⑦×$16pB$ を計算すると，$3q^2A^4-4pqA^3B-4p^2A^2B^2-24qAB^3-16pB^4=0$

左辺を因数分解すると，$(3qA+2pB)(qA^3-2pA^2B-8B^3)=0$

ところで，$qA^3-2pA^2B-8B^3=A^3\left\{q+p\left(-\dfrac{2B}{A}\right)+\left(-\dfrac{2B}{A}\right)^3\right\}=A^3g\left(-\dfrac{2B}{A}\right)$ であるから，$\mathbf{Q}$ 上既約である。

よって，$3qA+2pB=0$ より，$B=-\dfrac{3q}{2p}A$　…⑨

⑨を⑥に代入して，$C=\dfrac{2p}{3}A$　…⑩

⑨，⑩を⑤に代入して，$A^2=\dfrac{36p^2}{-4p^3-27q^2}$

ところで，

$-4p^3-27q^2=-4\left(-\dfrac{a^2}{3}+b\right)^3-27\left(\dfrac{2a^3}{27}-\dfrac{ab}{3}+c\right)^2=a^2b^2-4a^3c+18abc-4b^3-27c^2=d^2$，$d\in\mathbf{Q}$

$\therefore A=\pm\dfrac{6p}{d}\in\mathbf{Q}$

これを⑨，⑩に代入して，$B=\mp\dfrac{9q}{d}\in\mathbf{Q}$，$C=\pm\dfrac{4p^2}{d}\in\mathbf{Q}$ （複号同順）

よって，$\sqrt{-3\beta^2-4p}=\pm\left(\dfrac{6p}{d}\beta^2-\dfrac{9q}{d}\beta+\dfrac{4p^2}{d}\right)$であるから，

$$\beta_2,\ \beta_3=\frac{-\beta\pm\left(\dfrac{6p}{d}\beta^2-\dfrac{9q}{d}\beta+\dfrac{4p^2}{d}\right)}{2}=\frac{1}{2}\left\{-\beta\pm\frac{1}{d}(6p\beta^2-9q\beta+4p^2)\right\}$$

さて，$\alpha=\beta-\dfrac{a}{3}$ であるから，$\beta=\alpha+\dfrac{a}{3}$

$$\alpha_2=\beta_2-\frac{a}{3}=\frac{1}{2}\left\{-\beta+\frac{1}{d}(6p\beta^2-9q\beta+4p^2)\right\}-\frac{a}{3}$$

$$=\frac{1}{2}\left[-\left(\alpha+\frac{a}{3}\right)+\frac{1}{d}\left\{6p\left(\alpha+\frac{a}{3}\right)^2-9q\left(\alpha+\frac{a}{3}\right)+4p^2\right\}\right]-\frac{a}{3}$$

$$=-\frac{1}{2}(\alpha+a)+\frac{1}{2d}\left\{6p\alpha^2+(4ap-9q)\alpha+\frac{2}{3}a^2p-3ap+4p^2\right\}$$

最後に，$p=-\dfrac{a^2}{3}+b$，$q=\dfrac{2a^3}{27}-\dfrac{ab}{3}+c$ を代入すると，

$$\alpha_2=-\frac{1}{2}(\alpha+a)+\frac{1}{2d}\{2(-a^2+3b)\alpha^2+(-2a^3+7ab-9c)\alpha-a^2b-3ac+4b^2\}$$

同様に，

$$\alpha_3=-\frac{1}{2}(\alpha+a)-\frac{1}{2d}\{2(-a^2+3b)\alpha^2+(-2a^3+7ab-9c)\alpha-a^2b-3ac+4b^2\}$$

従って，方程式 $f(x)=0$ の１つの解を α とするとき，他の解を α の最低次の有理数係数の整式として表すと，

公式 $\boxed{-\dfrac{1}{2}(\alpha+a)\pm\dfrac{1}{2d}\{2(-a^2+3b)\alpha^2+(-2a^3+7ab-9c)\alpha-a^2b-3ac+4b^2\}}$ 答

問題２　$x^3+x^2-4x+1=0$ のとき，$a=1$，$b=-4$，$c=1$ より，$d=13$ であるから，上の公式に代入して，

$-\dfrac{1}{2}(\alpha+1)\pm\dfrac{1}{2\cdot13}\{2(-1-12)\alpha^2+(-2-28-9)\alpha+4-3+64\}=-\alpha^2-2\alpha+2$，$\alpha^2+\alpha-3$ 終

補足　確かめ

$\beta=-\alpha^2-2\alpha+2$，$\gamma=\alpha^2+\alpha-3$ とおくと，

$\alpha+\beta+\gamma=\alpha+(-\alpha^2-2\alpha+2)+(\alpha^2+\alpha-3)=-1$

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\alpha(-\alpha^2-2\alpha+2)+(-\alpha^2-2\alpha+2)(\alpha^2+\alpha-3)+(\alpha^2+\alpha-3)\alpha=-\alpha^4-3\alpha^3+2\alpha^2+7\alpha-6-1$

$=(\alpha^3+\alpha^2-4\alpha+1)(-\alpha-2)-4=-4$

$\alpha\beta\gamma=\alpha(-\alpha^2-2\alpha+2)(\alpha^2+\alpha-3)=(-\alpha^2-2\alpha+2)(\alpha^3+\alpha^2-3\alpha)=(-\alpha^2-2\alpha+2)(\alpha-1)$

$=-\alpha^3-\alpha^2+4\alpha-2=-1$

解と係数の関係から，α，β，γ は $x^3+x^2-4x+1=0$ の解となる。

(*)　a, b, c, a', b', c', p, q は有理数とする。
有理数の解をもたない3次方程式 $x^3+px+q=0$ の一つの解を $x=\alpha$ とすると，
(1)　$a\alpha^2+b\alpha+c=0 \Leftrightarrow a=b=c=0$ を示せ。
(2)　$a\alpha^2+b\alpha+c=a'\alpha^2+b'\alpha+c' \Leftrightarrow a=a',\ b=b',\ c=c'$ を示せ。

証明

(1)　($\Longleftarrow$) は自明

($\Longrightarrow$) $a\alpha^2+b\alpha+c=0$　…①より，

$a \fallingdotseq 0$ のとき，$\alpha^2+\dfrac{b}{a}\alpha+\dfrac{c}{a}=0$

両辺に，α を掛けると, $\alpha^3+\dfrac{b}{a}\alpha^2+\dfrac{c}{a}\alpha=0$　…②

$x=\alpha$ は $x^3+px+q=0$ の解であるから，$\alpha^3+p\alpha+q=0$　…③

②−③より，$\dfrac{b}{a}\alpha^2+\left(\dfrac{c}{a}-p\right)\alpha-q=0$　$\therefore\ b\alpha^2+(c-ap)\alpha-aq=0$ …④

①× b −④× a より，$(a^2p-ac+b^2)\alpha+a^2q+bc=0$　…⑤

$a^2p-ac+b^2 \fallingdotseq 0$ のとき，$\alpha=-\dfrac{a^2q+bc}{a^2p-ac+b^2}$

左辺は有理数でなく，右辺は有理数であるから，不合理。

したがって，$a^2p-ac+b^2=0$　…⑥

このとき，⑤は $a^2q+bc=0$　…⑦

⑥より，$c=\dfrac{a^2p+b^2}{a}$

これを⑦に代入すると，$a^2q+b\cdot\dfrac{a^2p+b^2}{a}=0$　$\therefore\ a^3q+a^2bp+b^3=0$

両辺を a^3 で割り，$\dfrac{b}{a}=t$ とおくと，$t^3+pt+q=0$

この3次方程式は有理数の解をもたないから，不合理である。

よって，$a=0$ である。

このとき，①は，$b \fallingdotseq 0$ のときは，$\alpha=-\dfrac{c}{b}$ となり，不合理。したがって，$b=0$

このとき，$c=0$ となる。

よって，$a=b=c=0$　終

(2)　$a\alpha^2+b\alpha+c=a'\alpha^2+b'\alpha+c' \quad \Leftrightarrow \quad (a-a')\alpha^2+(b-b')\alpha+c-c'=0$

(1)より，$a-a'=b-b'=c-c'=0$　よって，$a=a',\ b=b',\ c=c'$　終

補足　次のページに例を掲載する。

方程式 $x^3+ax^2+bx+c=0$ の1つの解を α とし，他の解を $A_2\alpha^2+B_2\alpha+C_2$， $A_3\alpha^2+B_3\alpha+C_3$ とおく。

$d=\sqrt{a^2b^2-4a^3c+18abc-4b^3-27c^2}\in\mathbf{Q}$

a	b	c	d	A_2	B_2	C_2	A_3	B_3	C_3
-3	-4	-1	7	-3	10	8	3	-11	-5
-2	-1	1	7	-1	1	2	1	-2	0
-1	-2	1	7	-1	0	2	1	-1	-1
0	-7	-7	7	-3	4	14	3	-5	-14
0	-7	7	7	-3	-5	14	3	4	-14
1	-2	-1	7	-1	-1	1	1	0	-2
2	-1	-1	7	-1	-2	0	1	1	-2
3	-4	1	7	-3	-11	5	3	10	-8
-6	-9	-3	9	-7	46	36	7	-47	-30
-3	0	1	9	-1	2	2	1	-3	1
-3	0	3	9	-1	1	3	1	-2	0
0	-3	-1	9	-1	0	2	1	-1	-2
0	-3	1	9	-1	-1	2	1	0	-2
3	0	-3	9	-1	-2	0	1	1	-3
3	0	-1	9	-1	-3	-1	1	2	-2
6	-9	3	9	-7	-47	30	7	46	-36
-2	-3	5	13	-1	0	4	1	-1	-2
-1	-4	-1	13	-1	1	3	1	-2	-2
1	-4	1	13	-1	-2	2	1	1	-3
2	-3	-5	13	-1	-1	2	1	0	-4
-2	-5	-1	19	-1	2	4	1	-3	-2
-1	-6	7	19	-1	-1	5	1	0	-4
1	-6	-7	19	-1	0	4	1	-1	-5
2	-5	1	19	-1	-3	2	1	2	-4
-3	-6	-1	27	-1	3	5	1	-4	-2
0	-9	-9	27	-1	1	6	1	-2	-6
0	-9	9	27	-1	-2	6	1	1	-6
3	-6	1	27	-1	-4	2	1	3	-5
1	-10	8	30	-31/30	-29/10	89/15	31/30	19/10	-104/15
2	-5	-6	30	-19/30	-31/30	8/5	19/30	1/30	-18/5
-4	-7	-1	37	-1	4	6	1	-5	-2
4	-7	1	37	-1	-5	2	1	4	-6
-5	-8	-1	49	-1	5	7	1	-6	-2
5	-8	1	49	-1	-6	2	1	5	-7
-9	-1	1	56	-3/2	13	11/2	3/2	-14	7/2
-4	-4	8	56	-1/2	1	4	1/2	-2	0
-2	-8	8	56	-1/2	0	4	1/2	-1	-2
-1	-9	1	56	-1/2	0	7/2	1/2	-1	-5/2
1	-9	-1	56	-1/2	-1	5/2	1/2	0	-7/2

a	b	c	d	A_2	B_2	C_2	A_3	B_3	C_3
2	-8	-8	56	-1/2	-1	2	1/2	0	-4
4	-4	-8	56	-1/2	-2	0	1/2	1	-4
9	-1	-1	56	-3/2	-14	-7/2	3/2	13	-11/2
-5	-2	8	62	-1/2	3/2	4	1/2	-5/2	1
-2	-9	2	62	-1/2	1/2	4	1/2	-1/2	-2
-1	-10	8	62	-1/2	-1/2	4	1/2	-1/2	-3
1	-10	-8	62	-1/2	-1/2	3	1/2	-1/2	-4
2	-9	-2	62	-1/2	-1/2	2	1/2	-1/2	-4
5	-2	-8	62	-1/2	-5/2	-1	1/2	3/2	-4
-6	-9	-1	63	-1	6	8	1	-7	-2
6	-9	1	63	-1	-7	2	1	6	-8
-6	-1	5	65	-3/5	14/5	4	3/5	-19/5	2
-3	-10	-1	65	-3/5	8/5	26/5	3/5	-13/5	-11/5
3	-10	1	65	-3/5	-13/5	11/5	3/5	8/5	-26/5
6	-1	-5	65	-3/5	-19/5	-2	3/5	14/5	-4
-6	0	8	72	-1/2	2	4	1/2	-3	2
-3	-9	3	72	-1/2	1	4.5	1/2	-2	-1.5
3	-9	-3	72	-1/2	-2	1.5	1/2	1	-4.5
6	0	-8	72	-1/2	-3	-2	1/2	2	-4
-7	-10	-1	79	-1	7	9	1	-8	-2
7	-10	1	79	-1	-8	2	1	7	-9
-4	-9	4	86	-1/2	3/2	5	1/2	-2.5	-1
4	-9	-4	86	-1/2	-5/2	1	1/2	3/2	-5
-7	0	7	91	-7/13	38/13	56/13	7/13	-51/13	35/13
7	0	-7	91	7/13	-51/13	-35/13	-7/13	38/13	-56/13
-5	-9	5	104	-1/2	2	11/2	1/2	-3	-1/2
5	-9	-5	104	-1/2	-3	1/2	1/2	2	-11/2
-9	-4	4	124	-3/4	25/4	13/2	3/4	-29/4	5/2
9	-4	-4	124	-3/4	-29/4	-5/2	3/4	25/4	-13/2
-6	-9	6	126	-1/2	5/2	6	1/2	-7/2	0
6	-9	-6	126	-1/2	-7/2	0	1/2	5/2	-6
-7	-9	7	152	-1/2	3	13/2	1/2	-4	1/2
7	-9	-7	152	-1/2	-4	-1/2	1/2	3	-13/2
-8	-9	8	182	-1/2	7/2	7	1/2	-9/2	1
8	-9	-8	182	-1/2	-9/2	-1	1/2	7/2	-7
-9	-9	9	216	-1/2	4	15/2	1/2	-5	3/2
9	-9	-9	216	-1/2	-5	-3/2	1/2	4	-15/2
-10	-9	10	254	-1/2	9/2	8	1/2	-11/2	2
10	-9	-10	254	-1/2	-11/2	-2	1/2	9/2	-8