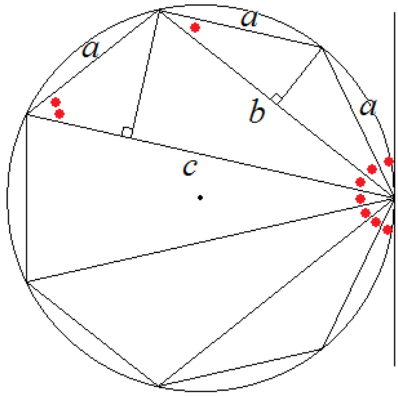
● 第 395 回問題解答＜三角定規＞

【問題１】

正7角形において，それぞれの角度は右図のようになるから，$\bullet = \dfrac{\pi}{7}$。

このとき，$b=2a\cos\dfrac{\pi}{7}$，$c=a\cos\dfrac{2\pi}{7}+b\cos\dfrac{\pi}{7}$。



$a=1$ としてよく，$\cos\dfrac{\pi}{7}=u$ と書くと

$$\cos\frac{2\pi}{7}=2\cos^2\frac{\pi}{7}-1=2u^2-1$$

よって，$b=2u$，$b^2=4u^2$ …①

$$c=2u^2-1+2u\cdot u=4u^2-1$$

$$c^2=16u^4-8u^2+1 \quad \cdots②$$

ここで，$\cos\dfrac{4\pi}{7}=\cos\left(\pi-\dfrac{3\pi}{7}\right)=-\cos\dfrac{3\pi}{7}$ だから，

倍角，3 倍角の公式を適用し，

$$2(2u^2-1)^2-1=-4u^3+3u$$

展開して整理し

$$(u+1)(8u^3-4u^2-4u+1)=0$$

$u\neq-1$ より　$8u^3-4u^2-4u+1=0$

$$\therefore\quad 8u^3=4u^2+4u-1 \quad \cdots③$$

(1) $\dfrac{b^2}{a^2}+\dfrac{c^2}{b^2}+\dfrac{a^2}{c^2}=4u^2+\dfrac{16u^4-8u^2+1}{4u^2}+\dfrac{1}{16u^4-8u^2+1}$

右辺に③を適用し次数を下げ，通分して計算を進めると，

$$=\ \cdots\ =\frac{40u^2+20u-5}{8u^2+4u-1}=\mathbf{5} \quad \cdots[証明了]$$

(2) $\dfrac{a^2}{b^2}+\dfrac{b^2}{c^2}+\dfrac{c^2}{a^2}=\dfrac{1}{4u^2}+\dfrac{4u^2}{16u^4-8u^2+1}+16u^4-8u^2+1$

(1) 同様，右辺に③を適用し次数を下げ，通分して計算を進めることにより，

$$=\ \cdots\ =\frac{48u^2+24u-6}{8u^2+4u-1}=\mathbf{6} \quad \cdots[証明了]$$

＜感想＞ (1) (2) ともに結果の美しさに驚きます。

これは，よく知られている有名事実なのでしょうか？