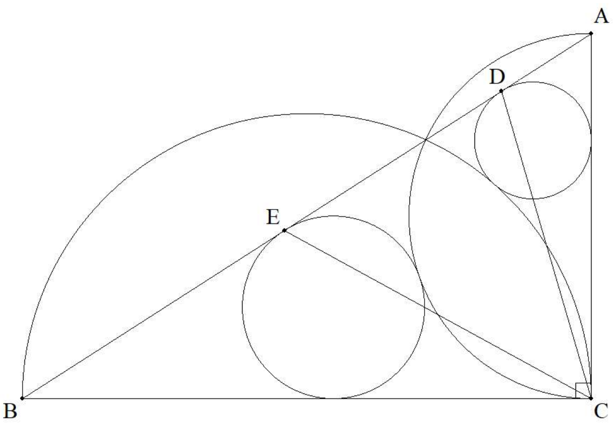
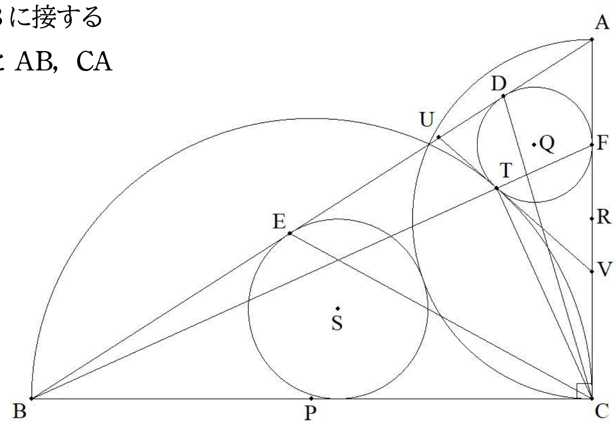
第 384 回追加問題　直角三角形と半円と円に関する証明問題

$\angle$C=90° である△ABC について，図のように，
BC を直径とする半円と CA，AB に接する円と
AB との接点を D とする。
CA を直径とする半円と AB，BC に接する円と
AB との接点を E とする。
このとき，$\angle$DCE=45° を証明せよ。



解答　BC を直径とする半円の中心を P，その半円とCA，AB に接する
円の中心を Q，半円 P と円 Q の接点 T における共通内接線と AB，CA
との交点をそれぞれ U，V，BT と CA の交点を F とする。
はじめに，BC = BD を示す。
BCは半円 P の直径なので，$\angle$BTC=90°
また，VC=VT=VFより，$\angle$CTF=90°
∴ 3 点 B，T，F は一直線上にある。
△BFC∽△BCT であるから，BF：BC=BC：BT
$BC^2=BT \cdot BF$　…①
また，円 Q に方べきの定理を適用すると，
$BD^2=BT \cdot BF$　…②
①，②より，$BC^2=BD^2$　BC>0，BD>0より，BC=BD

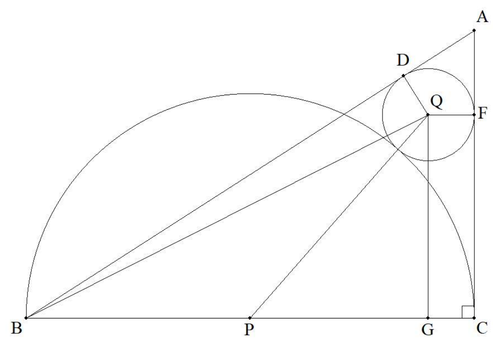


よって△BCD は二等辺三角形になるから，$\angle BDC=\dfrac{180°-B}{2}=\angle CDE$

同様に，△AECも二等辺三角形になるから，$\angle AEC=\dfrac{180°-A}{2}=\angle CED$

したがって，△CDEにおいて，$\angle DCE=180°-\angle CDE-\angle CED=180°-\dfrac{180°-B}{2}-\dfrac{180°-A}{2}=\dfrac{A+B}{2}=45°$　終

別解　（BC=BDの証明）
Q から BC に下した垂線の足をGとする。
半円 P，円 Q の半径をそれぞれ r_1，r_2 とおく。BC= $2r_1$
直角三角形 QPG に三平方の定理を適用すると，
$QG=\sqrt{(r_1+r_2)^2-(r_1-r_2)^2}=2\sqrt{r_1 r_2}$
直角三角形 QBG とQBDにおいて，QBは共通であるから，
三平方の定理により，$BD^2+QD^2=BG^2+QG^2$
$BD^2+{r_2}^2=(2r_1-r_2)^2+(2\sqrt{r_1 r_2})^2$
$\therefore BD^2=4{r_1}^2$
BD>0より，$BD=2r_1=BC$　終



補足

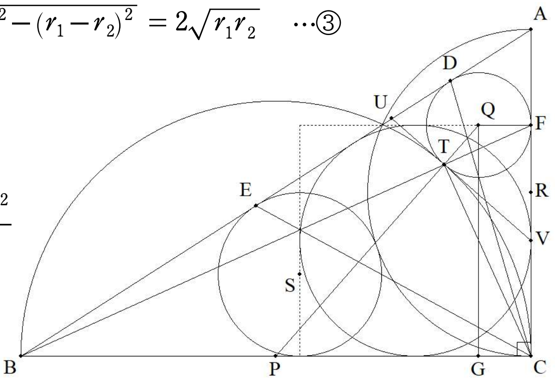
[1]　△ABC の内接円，半円 P，円 Q の半径をそれぞれ r，r_1，r_2 とおくと，$r^2=r_1r_2$ が成り立つ。

証明　BC$=a$，CA$=b$，AB$=c$（$c=\sqrt{a^2+b^2}$）とおくと，$r=\dfrac{a+b-c}{2}$ である。

Q から BC に下した垂線の足を G とすると，CF=QG$=\sqrt{(r_1+r_2)^2-(r_1-r_2)^2}=2\sqrt{r_1r_2}$　…③

また，CF$=b-$AF$=b-$AD$=b-(c-a)=2r$　…④

③，④より，$2r=2\sqrt{r_1r_2}$　よって，$r^2=r_1r_2$　**終**



[2]　$r_1=\dfrac{a}{2}$ であるから，$r_2=\dfrac{r^2}{r_1}=\dfrac{\left(\dfrac{a+b-c}{2}\right)^2}{\dfrac{a}{2}}=\dfrac{(a+b-c)^2}{2a}$

同様に，半円 R，円 S の半径をそれぞれ r_3，r_4 とおくと，

$r^2=r_3r_4$ より，$r_3=\dfrac{b}{2}$，$r_4=\dfrac{(a+b-c)^2}{2b}$ である。

（2020/4/12　ジョーカー）