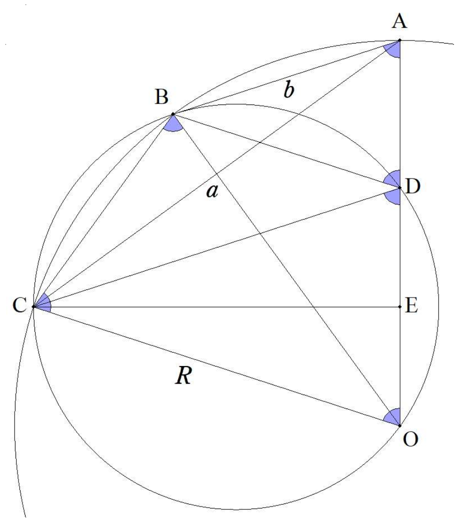
追加問題 (1)

1 辺 a の正五角形と 1 辺 b の正十角形が同じ円に内接している。$a^2-b^2=2$ のとき，円の面積を求めよ。



解答

円 O の半径を R とし，正十角形 ABC⋯J，正五角形 ACEGI とすると，

AB$=b$，AC$=a$，$\angle$AOB$=\dfrac{360°}{10}=36°$である。

二等辺三角形 OABについて，$\angle$OAB$=\dfrac{1}{2}(180°-36°)=72°$ である。

△OBC の外接円と OA との交点を D とする。

$\angle$BDA$=\angle$OCB$=\angle$OAB$=72°$ より，△BDA∽△OAB

b：AD$=$AO：b　∴ $b^2=$AD・AO　⋯①

$\angle$CDO$=\angle$CBO$=72°$，$\angle$COD$=\angle$AOB$\times 2=72°$より，

△COD は二等辺三角形である。

C から OD に下した垂線の足を E とすると，DE＝EOである。

AD・AO$=$(AE$-$DE)(AE$+$EO)$=$AE$^2-$EO$^2=$AC$^2-$(CE$^2+$EO^2)

　　　　$=$AC$^2-$OC$^2=a^2-R^2$　⋯②

①，②より，$b^2=a^2-R^2$

よって，$a^2-b^2=R^2=2$であるから，円 O の面積は$\pi R^2=2\pi$　答

(2021/3/7　ジョーカー)