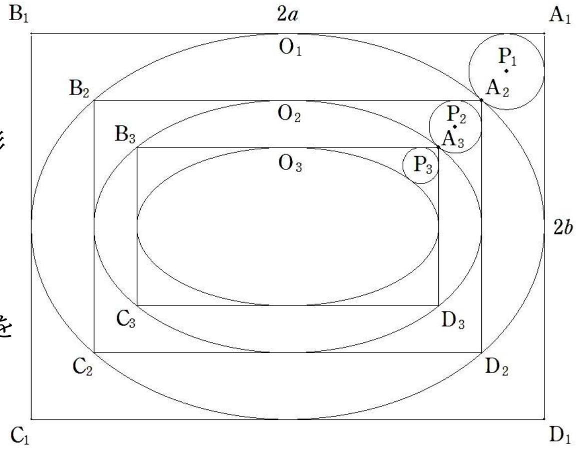
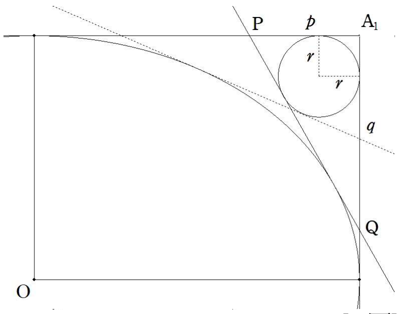
第 398 回追加問題 (2)

横 $2a$，縦 $2b$ である長方形 $A_1B_1C_1D_1$ に楕円 O_1 を内接させる。軸は辺に平行である。
O_1 に外接し，2 辺に接する円のうち $\angle A_1$ 内のものを P_1 とする。
O_1 と P_1 の接点を A_2 とし，O_1 に内接し，A_2 を頂点とする長方形を $A_2B_2C_2D_2$ とする。$A_2B_2 /\!/ A_1B_1$である。
長方形 $A_2B_2C_2D_2$ に楕円 O_2 を内接させる。軸は辺に平行である。
O_2 に外接し，2 辺に接する円のうち $\angle A_2$ 内のものを P_2 とする。
O_2とP_2の接点を A_3 とし，O_2 に内接し，A_3 を頂点とする長方形を $A_3B_3C_3D_3$ とする。$A_3B_3 /\!/ A_2B_2$である。
以下，同様に楕円，円，長方形をつくっていく。
このとき，楕円 O_n の長軸÷短軸の値を求めよ。



解答　まず，円 P_1 の半径 r を求める。
A_1B_1，A_1D_1 に接し，楕円に外接しない円を考えると，長方形の辺を除き，円と楕円の共通接線は 2 本考えられる。([1 図])
共通接線が 1 本の場合が，求める半径 r である。
接線とA_1B_1，A_1D_1 との交点をそれぞれ P，Q とし，$A_1P=p$，$A_1Q=q$，円の半径を r とする。

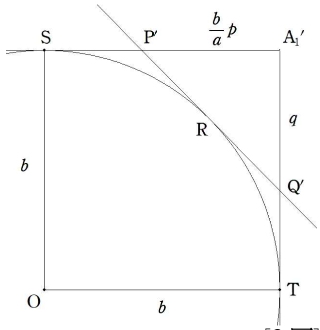


[1 図]

$\triangle A_1PQ$ の面積を 2 通りで表す。
$PQ=(p-r)+(q-r)=p+q-2r$　…①であるから，

$$\frac{1}{2}pq=\frac{1}{2}r\{p+q+(p+q-2r)\}\quad \therefore pq=2r(p+q-r)\quad \cdots②$$

次に楕円の長軸の方向にこの図形を $\dfrac{b}{a}$ 倍すると，長方形は 1 辺 $2b$ の正方形になり，楕円は半径 b の円になる。([2 図])
また，$\triangle A_1PQ$ について，A_1 は A_1' に，P は P′ に，Q は Q′ に移動する。



[2 図]

$$A_1'P'=\frac{b}{a}A_1P=\frac{b}{a}p,\quad A_1'Q'=A_1Q=q,$$

$$P'Q'=P'S+Q'T=\left(b-\frac{b}{a}p\right)+(b-q)=2b-\frac{b}{a}p-q$$

$\triangle A_1'P'Q'$ に三平方の定理を適用すると，$\left(2b-\dfrac{b}{a}p-q\right)^2=\left(\dfrac{b}{a}p\right)^2+q^2$

整理すると，$2ab-2bp-2aq+pq=0$

qについて解くと，$q=\dfrac{2b(a-p)}{2a-p}$

これを②に代入すると，$p\cdot\dfrac{2b(a-p)}{2a-p}=2r\left\{p+\dfrac{2b(a-p)}{2a-p}-r\right\}$

両辺に $\dfrac{2a-p}{2}$ を掛け，pについて整理すると，$(b-r)p^2+\{r^2+2(a-b)r-ab\}p+2ar(b-r)=0$　…③

この p についての 2 次方程式が重解をもつとき，楕円と円の共通接線が 1 本になったときで，円は楕円にも接していることになる。

③の重解を p とすると，解と係数の関係から， $p^2=\dfrac{2ar(b-r)}{b-r}=2ar$ $\therefore\ p=\sqrt{2ar}$ …④

同様に，楕円の短軸の方向に $\dfrac{a}{b}$ 倍して考えると， $q=\sqrt{2br}$ …⑤

このとき，$\mathrm{PQ}=\sqrt{p^2+q^2}=\sqrt{2ar+2br}=\sqrt{2r(a+b)}$ …⑥

また，①に④，⑤を代入すると，$\mathrm{PQ}=\sqrt{2ar}+\sqrt{2br}-2r=\sqrt{2r}(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{2r})$ …⑦

⑥，⑦より， $\sqrt{2r(a+b)}=\sqrt{2r}(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{2r})$

両辺を $\sqrt{2r}$ で割り，移項すると， $\sqrt{2r}=\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{a+b}$

両辺を2乗し，整理すると，$r=a+b+\sqrt{a}\,b-(\sqrt{a}+\sqrt{b})\sqrt{a+b}$

次に，与えられた図形を[3 図]のように座標平面上に置く。

$\mathrm{A_1}(a,\ b)$ となり，$\mathrm{A_2}(a_2,\ b_2)$ とおく。

[4 図]より，$\mathrm{A_2Q}=\sqrt{2br}-r$

$=\sqrt{b}(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{a+b})-a-b-\sqrt{ab}+(\sqrt{a}+\sqrt{b})\sqrt{a+b}$

$=\sqrt{a(a+b)}-a$

また，$\mathrm{A_2F}=a-a_2$ である。$\mathrm{A_2F}:\mathrm{PA_1}=\mathrm{A_2Q}:\mathrm{PQ}$ より，

$(a-a_2):\sqrt{2ar}=\{\sqrt{a(a+b)}-a\}:\sqrt{2(a+b)r}$

$a-a_2=\{\sqrt{a(a+b)}-a\}\sqrt{\dfrac{a}{a+b}}=a-\dfrac{a\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}}$

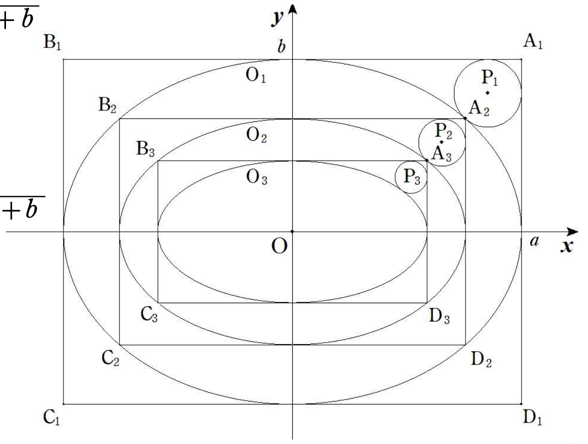
$\therefore a_2=\dfrac{a\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}}$

同様に， $b_2=\dfrac{b\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}}$ となるから，

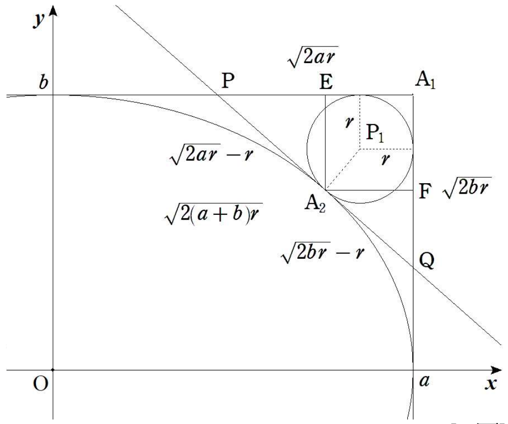
$\mathrm{A_1}(a,\ b)$ のとき，$\mathrm{A_2}\left(\dfrac{a\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}},\ \dfrac{b\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}}\right)$ となる。

よって，$A_n(a_n,\ b_n)$ とおくと，

$a_{n+1}=\dfrac{a_n\sqrt{a_n}}{\sqrt{a_n+b_n}}$ …①，$b_{n+1}=\dfrac{b_n\sqrt{b_n}}{\sqrt{a_n+b_n}}$ …②となる。



[3 図]



[4 図]

①÷②より， $\dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}}=\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)^{\frac{3}{2}}$

両辺の対数をとると， $\log\dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}}=\dfrac{3}{2}\log\dfrac{a_n}{b_n}$

数列 $\left\{\log\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$ は，初項 $\log\dfrac{a}{b}$ ，公比 $\dfrac{3}{2}$ の等比数列であるから， $\log\dfrac{a_n}{b_n}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}\log\dfrac{a}{b}$ $\therefore\ \dfrac{a_n}{b_n}=\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}}$

よって，求める長軸÷短軸の値は， $\dfrac{a_n}{b_n}=\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}}$ 答

(2021/3/7　ジョーカー)