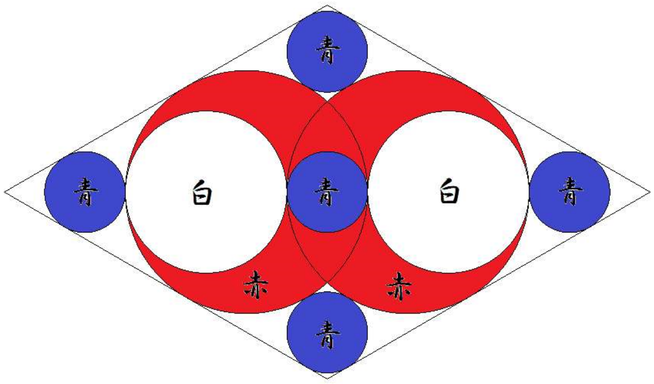
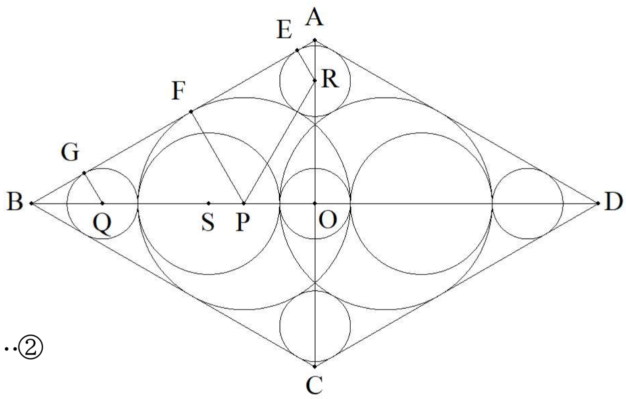
第399回

問題１
ひし形の中に交わる赤円が２個，白円が２個，青円が５個接している。
白円の直径が与えられたとき，青円の直径を求めよ。



解答　図のように記号を付け，AC= $2a$，BD= $2b$，AB= $\sqrt{a^2+b^2}=c$，赤，青，白円の半径をそれぞれ r_1，r_2，r_3 とおく。



赤の直径は青の直径と白の直径の和であるから，

$2r_1=2r_2+2r_3$　∴ $r_3=r_1-r_2$　…①

△QBG∽△ABO より，BQ= $\frac{c}{a}r_2$ であるから，

BQ+ $2r_1$ =BO より，$\frac{c}{a}r_2+2r_1=b$　∴$r_1=\frac{ab-cr_2}{2a}$　…②

△ARE∽△ABOより，AE= $\frac{a}{b}r_2$

また，EF=FG= $2\sqrt{r_1r_2}$，GB= $\frac{b}{a}r_2$ である。

AE+EF+FG+GB=ABであるから，

$\frac{a}{b}r_2+2\sqrt{r_1r_2}+2\sqrt{r_1r_2}+\frac{b}{a}r_2=c$　∴ $\frac{c^2}{ab}r_2+4\sqrt{r_1r_2}=c$

移項して，両辺を２乗すると，$16a^2b^2r_1r_2=c^2(ab-cr_2)^2$　…③

これに②を代入すると，$16a^2b^2\cdot\frac{ab-cr_2}{2a}\cdot r_2=c^2(ab-cr_2)^2$

移項して，整理すると，$(ab-cr_2)\{(ab^2+c^3)r_2-abc^2\}=0$　∴$r_2=\frac{ab}{c}$，$r_2=\frac{abc^2}{8ab^2+c^3}$

$r_2=\frac{ab}{c}$ のとき，②より，$r_1=0$ となり，不適。

よって，$r_2=\frac{abc^2}{8ab^2+c^3}$　②より，$r_1=\frac{4ab^3}{8ab^2+c^3}$　（この２式を④とおく。）

このとき①より，$r_3=\frac{4ab^3}{8ab^2+c^3}-\frac{abc^2}{8ab^2+c^3}=\frac{ab(4b^2-c^2)}{8ab^2+c^3}=\frac{ab(3b^2-a^2)}{8ab^2+c^3}$　…⑤

④，⑤より，$\frac{r_2}{r_3}=\frac{c^2}{3b^2-a^2}=\frac{a^2+b^2}{3b^2-a^2}=\frac{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}{3\left(\frac{b}{a}\right)^2-1}$　…⑥

$\triangle$PBF∽$\triangle$ABOより，BP$=\dfrac{c}{a}r_1$であるから，PO$=b-\dfrac{c}{a}r_1$

$\triangle$ARE∽$\triangle$ABOより，AR$=\dfrac{c}{b}r_2$であるから，RO$=a-\dfrac{c}{b}r_2$

また，RP$=r_1+r_2$であるから，$\triangle$RPOに三平方の定理を適用して，$\left(b-\dfrac{c}{a}r_1\right)^2+\left(a-\dfrac{c}{b}r_2\right)^2=(r_1+r_2)^2$

展開すると，$b^2-\dfrac{2bc}{a}r_1+\dfrac{c^2}{a^2}r_1{}^2+a^2-\dfrac{2ac}{b}r_2+\dfrac{c^2}{b^2}r_2{}^2=r_1{}^2+2r_1r_2+r_2{}^2$

$a^2+b^2=c^2$より，$c^2-2c\left(\dfrac{b}{a}r_1+\dfrac{a}{b}r_2\right)+\left(\dfrac{b}{a}r_1\right)^2+\left(\dfrac{a}{b}r_2\right)^2=2\left(\dfrac{b}{a}r_1\right)\left(\dfrac{a}{b}r_2\right)$

これに，④より得られる$\dfrac{b}{a}r_1=\dfrac{4b^4}{8ab^2+c^3}$，$\dfrac{a}{b}r_2=\dfrac{a^2c^2}{8ab^2+c^3}$を代入すると，

$$c^2-2c\left(\frac{4b^4}{8ab^2+c^3}+\frac{a^2c^2}{8ab^2+c^3}\right)+\left(\frac{4b^4}{8ab^2+c^3}\right)^2+\left(\frac{a^2c^2}{8ab^2+c^3}\right)^2=2\left(\frac{4b^4}{8ab^2+c^3}\right)\left(\frac{a^2c^2}{8ab^2+c^3}\right)$$

分母を払うと，$c^2(8ab^2+c^3)^2-2c(4b^4+a^2c^2)(8ab^2+c^3)+16b^8+a^4c^4=8a^2b^4c^2$

$c=\sqrt{a^2+b^2}$を代入して整理すると，$(7a^2+3b^2)^2-16a(3b^2-a^2)\sqrt{a^2+b^2}=0$

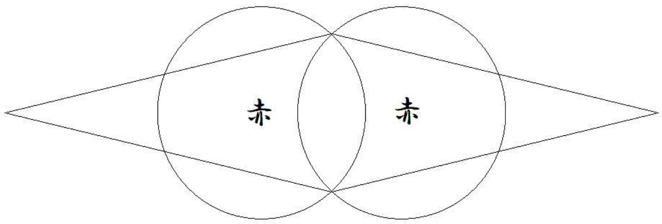
両辺に，$(7a^2+3b^2)^2+16a(3b^2-a^2)\sqrt{a^2+b^2}$を掛けると，$(7a^2+3b^2)^4-256a^2(3b^2-a^2)^2(a^2+b^2)=0$

因数分解すると，$(3a^2-b^2)(5a^2+9b^2)(143a^4+150a^2b^2-9b^4)=0$

図より，$b>a>0$であるから，$\dfrac{b}{a}=\sqrt{3}$，$\sqrt{\dfrac{25+16\sqrt{3}}{3}}$

[1]　$\dfrac{b}{a}=\sqrt{3}$のとき，⑥より，$\dfrac{r_2}{r_3}=\dfrac{1+3}{3\cdot 3-1}=\dfrac{1}{2}$

[2]　$\dfrac{b}{a}=\sqrt{\dfrac{25+16\sqrt{3}}{3}}$のとき，$\dfrac{b}{a}=t$とおく。



④より，$r_1=\dfrac{4ab^3}{8ab^2+c^3}$

$$=\frac{4b^3}{8ab^2+(a^2+b^2)\sqrt{a^2+b^2}}a$$

$$=\frac{4t^3}{8t^2+(1+t^2)\sqrt{1+t^2}}a=\frac{\sqrt{356305+264872\sqrt{3}}}{676}a\quad(\fallingdotseq 1.33553\,a)$$

となり，$r_1>a$となるから，赤円がひし形内に納まらないから不適である。

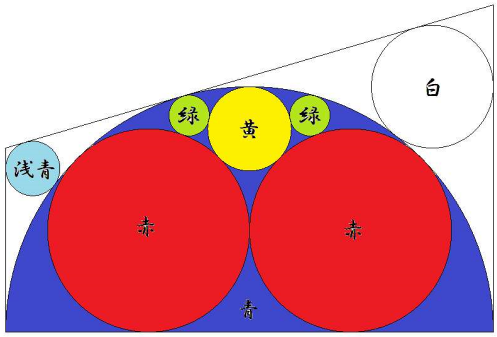
以上により，（青円の直径）＝（白円の直径）$\times\dfrac{1}{2}$　答

補足　このとき，$\dfrac{b}{a}=\sqrt{3}$より，$\triangle$ABCは正三角形となるから，ひし形は正三角形を2個つなげたものになる。

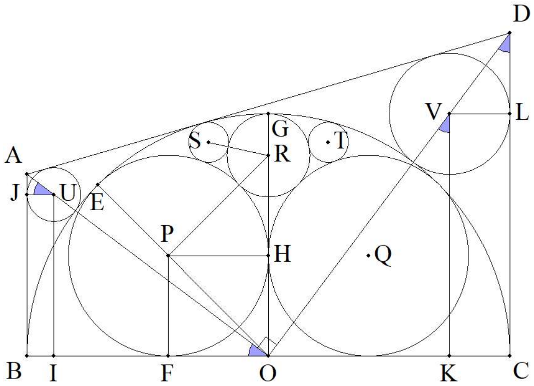
（赤円の直径）＝（白円の直径）$\times\dfrac{3}{2}$，（ひし形の長い方の対角線）＝BD＝（白円の直径）×4

問題２

台形内に半青円を作る。ただし青円の半径は台形の底辺の半分である。
その中へ赤，白，黄，浅青，緑円の合計７個の円を入れる。
赤の直径が与えられたときに緑の円の直径を求めよ。



解答　図のように記号を付ける。



青円の半径を a，赤，黄，緑，浅青，白円の半径をそれぞれ
r_1，r_2，r_3，r_4，r_5，AB＝b とおく。

CD＝c とおくと，$2b\cdot 2c=(2a)^2$ より，$c=\dfrac{a^2}{b}$

OE＝OP＋PEより，$a=\sqrt{2}\,r_1+r_1$ であるから，

$r_1=(\sqrt{2}-1)a$　…①

△RPHに三平方の定理を適用して，RH＝$\sqrt{(r_1+r_2)^2-r_1{}^2}$　…②

また，RH＝GO－GR－HO＝$a-r_2-r_1$　…③

②，③より，$\sqrt{(r_1+r_2)^2-r_1{}^2}=a-r_2-r_1$

両辺を２乗すると，$(r_1+r_2)^2-r_1{}^2=a^2-2a(r_1+r_2)+(r_1+r_2)^2$

$$r_2=\frac{a^2+r_1{}^2}{2a}-r_1=\frac{(a-r_1)^2}{2a}=\frac{\{a-(\sqrt{2}-1)a\}^2}{2a}=(3-2\sqrt{2})a$$

円Ｏ，Ｐ，Ｒ，Ｓにデカルトの円定理を適用すると，$\left(\dfrac{1}{r_1}+\dfrac{1}{r_2}+\dfrac{1}{r_3}-\dfrac{1}{a}\right)^2=2\left(\dfrac{1}{r_1{}^2}+\dfrac{1}{r_2{}^2}+\dfrac{1}{r_3{}^2}+\dfrac{1}{a^2}\right)$

$r_1=(\sqrt{2}-1)a$，$r_2=(3-2\sqrt{2})a$ を代入して，$r_3=\dfrac{\sqrt{2}-1}{5}a$，$(\sqrt{2}-1)a$

題意に適するのは，$r_3=\dfrac{\sqrt{2}-1}{5}a=\dfrac{r_1}{5}$　よって，（緑円の直径）＝（赤円の直径）×$\dfrac{1}{5}$　答

補足　（薄青円の半径）△AJU∽△ABO より，AU：$r_4=\sqrt{a^2+b^2}:a$　AU＝$\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}r_4$

AU＋UO＝AO より，$\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}r_4+(r_4+a)=\sqrt{a^2+b^2}$　$\therefore r_4=\dfrac{a(\sqrt{a^2+b^2}-a)}{\sqrt{a^2+b^2}+a}=\dfrac{a(\sqrt{a^2+b^2}-a)^2}{b^2}$

（白円の半径）同様に，DV＝$\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}r_5$

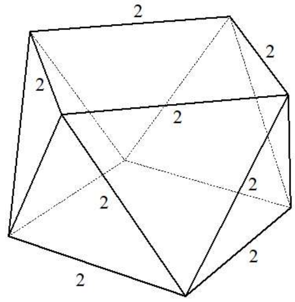
DV＋VO＝DO より，$\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}r_5+(r_5+a)=\sqrt{a^2+\left(\dfrac{a^2}{b}\right)^2}$　$\therefore r_5=\dfrac{(\sqrt{a^2+b^2}-b)^2}{a}$

追加問題１（出題：三角定規さん）

右の立体は，上下の底面は正方形，側面は８つの正三角形が上下交互に並んでいる。

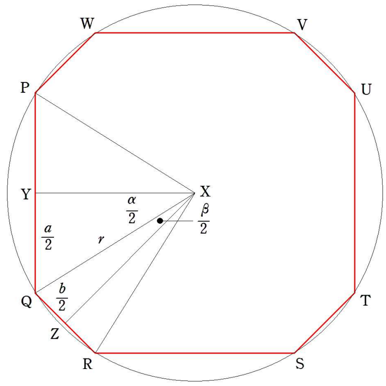
また，２つの正方形は上から見て一方が45°回転している。

１辺を２とし，この立体の体積を求めよ。



補題　八角形PQRSTUVWについて，PQ＝RS＝TU＝VW＝a，QR＝ST＝UV＝WP＝bのとき，八角形の面積Sは，

S＝$a^2+2\sqrt{2}ab+b^2$



証明　八角形は円に内接し，中心をX，半径をrとする。

PQ，QRの中点をそれぞれY，Z，∠PXQ＝α，∠QXR＝βとおくと，

QY＝$\dfrac{a}{2}$，∠QXY＝$\dfrac{\alpha}{2}$より，$\sin\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{a}{2r}$，$\cos\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\sqrt{4r^2-a^2}}{2r}$

QZ＝$\dfrac{b}{2}$，∠QXZ＝$\dfrac{\beta}{2}$より，$\sin\dfrac{\beta}{2}=\dfrac{b}{2r}$，$\cos\dfrac{\beta}{2}=\dfrac{\sqrt{4r^2-b^2}}{2r}$

であるから，

$$S=(\triangle XPQ+\triangle XQR)\times 4=\left(\frac{1}{2}r^2\sin\alpha+\frac{1}{2}r^2\sin\beta\right)\times 4=2r^2\left(2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}+2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}\right)$$

$$=4r^2\left(\frac{a}{2r}\cdot\frac{\sqrt{4r^2-a^2}}{2r}+\frac{b}{2r}\cdot\frac{\sqrt{4r^2-b^2}}{2r}\right)=a\sqrt{4r^2-a^2}+b\sqrt{4r^2-b^2}\quad\cdots(*)$$

ここで，$\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{\beta}{2}=\dfrac{\pi}{4}$であるから，$\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{\beta}{2}\right)=\sin\dfrac{\pi}{4}$

$\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\beta}{2}+\cos\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{\beta}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$より，$\dfrac{a}{2r}\cdot\dfrac{\sqrt{4r^2-b^2}}{2r}+\dfrac{\sqrt{4r^2-a^2}}{2r}\cdot\dfrac{b}{2r}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

分母を払って，$a\sqrt{4r^2-b^2}+b\sqrt{4r^2-a^2}=2\sqrt{2}r^2$

両辺を２乗して整理すると，$2ab\sqrt{4r^4-a^2}\sqrt{4r^2-b^2}=2a^2b^2-4(a^2+b^2)r^2+8r^4$

両辺を２乗して右辺に移項し，整理すると，$16r^2\{4r^4-4(a^2+b^2)r^2+a^4+b^4\}=0$

$r\fallingdotseq 0$より，$4r^4-4(a^2+b^2)r^2+a^4+b^4=0\quad\therefore r^2=\dfrac{a^2+b^2\pm\sqrt{2}ab}{2}$

題意に適するのは，$r^2=\dfrac{a^2+b^2+\sqrt{2}ab}{2}$（∵実際に，$a=b$の場合を計算すると分かる。）

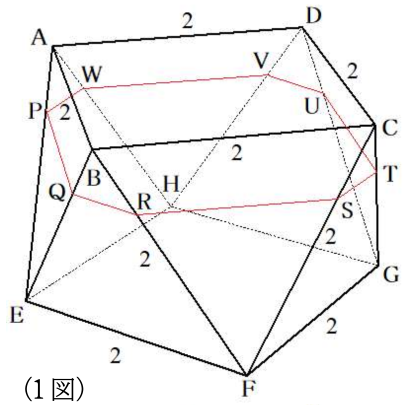
このとき，$\sqrt{4r^2-a^2}=\sqrt{a^2+2\sqrt{2}ab+2b^2}=a+\sqrt{2}b$

同様に，$\sqrt{4r^2-b^2}=\sqrt{2}a+b$であるから，（$*$）より，

S＝$a(a+\sqrt{2}b)+b(\sqrt{2}a+b)=a^2+2\sqrt{2}ab+b^2$　終

補足　S＝$(a+b)^2+2(\sqrt{2}-1)ab$とも変形できる。

解答 与えられた立体に図のように記号を付ける。

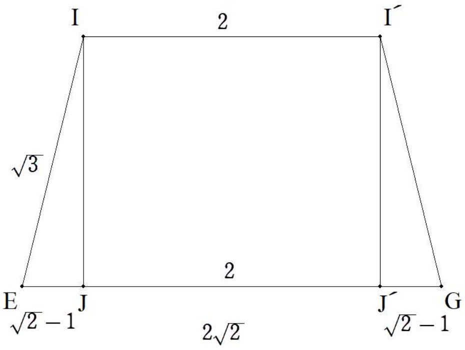


(1図)

正方形 EFGH が底面になるように，水平なテーブルに置く。
正方形 ABCD と EFGH の距離（立体の高さ）を h とおく。
正方形 ABCD から下に x のところで水平な平面で立体を切り，
その切断面を八角形 PQRSTUVWとし，その断面積を $S(x)$ で表す。（１図）
このとき，求める立体の体積 V は,

$$V=\int_0^h S(x)dx \quad \cdots ①$$

で求められる。

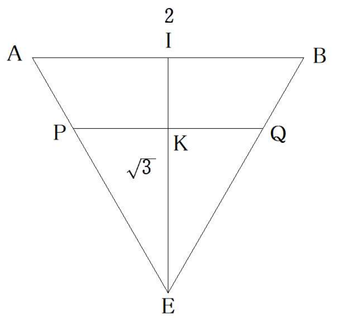


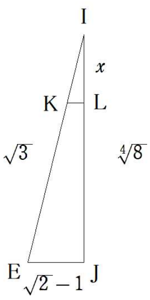
AB，CD の中点をそれぞれ I，I′ とすると，四角形 IEGI′ は，II′＝２，EG＝ $2\sqrt{2}$ の等脚台形となる。I から EG に下した垂線の足を J とする。
IE は１辺２の正三角形 AEB の高さであるから，IE＝ $\sqrt{3}$
△IEJに三平方の定理を適用して，

$$IJ=\sqrt{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2}-1)^2}=\sqrt{2\sqrt{2}}=\sqrt[4]{8}=h$$ （高さが求められた。）

次に，PQ と EI の交点を K，K からIJ に下した垂線の足を L とする。
IL＝ x とおき，まず，PQを求める。

△IKL∽△IEJ であるから，IK＝ $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[4]{8}}x$

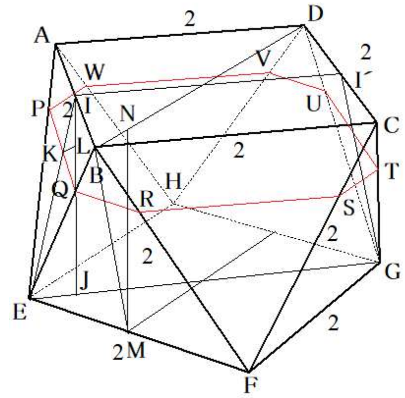




正三角形 EPQ において，

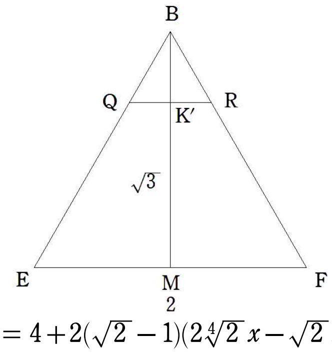
EK＝ $\sqrt{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[4]{8}}x$ であるから,

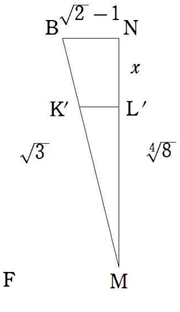
PQ＝ $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ EK＝ $2\left(1-\dfrac{x}{\sqrt[4]{8}}\right)$



同様に，QR を求める。
EF の中点 M から BD に下した垂線の足を N，QRとBMの交点を K′，K′ から MN に下した垂線の足を L′ とすると，

BK′＝ $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[4]{8}}x$，QR＝ $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ BK′＝ $\dfrac{2}{\sqrt[4]{8}}x$





よって，断面積 $S(x)$ は，補題の条件を満たし，a ＝PQ＝ $2\left(1-\dfrac{x}{\sqrt[4]{8}}\right)$，

b ＝QR＝ $\dfrac{2}{\sqrt[4]{8}}x$ の場合である。このとき， $a+b=2$ となるから,

$$S(x)=(a+b)^2+2(\sqrt{2}-1)ab=2^2+2(\sqrt{2}-1)\cdot 2\left(1-\frac{x}{\sqrt[4]{8}}\right)\cdot\frac{2}{\sqrt[4]{8}}x=4+2(\sqrt{2}-1)(2\sqrt[4]{2}\,x-\sqrt{2}\,x^2)$$

従って，①より，

$$V=\int_0^{\sqrt[4]{8}}\{4+\cdot 2(\sqrt{2}-1)(2\sqrt[4]{2}\,x-\sqrt{2}\,x^2)\}dx=\left[4x+2(\sqrt{2}-1)\left(\sqrt[4]{2}\,x^2-\frac{\sqrt{2}}{3}x^3\right)\right]_0^{\sqrt[4]{8}}$$

$$=\frac{8(\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{8})}{3}$$ （≒ 7.656） 答

補足 １辺２のこの立体をA，１辺２の立方体を C とする。

体積比 A：C＝ $\dfrac{8(\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{8})}{3}$ ：8 ＝ 0.957 ：1 より，Aの方が約 4.3 %小さい。

表面積の比　A:C=$\left(2^2\times 2+\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot 2^2\times 8\right)$ ： $2^2\times 6$ ＝$(1+\sqrt{3})$ ： 3＝0.911 ：1 より，Aの方が約 8.9 %小さい。

はじめ，雛あられを立方体の箱に入れて販売していた。経費節減で，雛あられを A の箱に入れると，あられの量も箱の材料費も少なくて済む，ということか？

また，A の立体を正方形に平行な平面で切ったとき，その断面の周の長さは，正方形の周の長さに等しい。

追加問題 2

ある生徒は続けて遅刻をしないように心掛けている。この生徒が遅刻をした次の日には 90 %遅刻をしないが，遅刻をしなかった次の日には 30 %遅刻をする恐れがある。長い間には，この生徒は何%遅刻するか。

$\boxed{解答}$　n 日目に遅刻する確率を a_n とおくと，$(n+1)$ 日目は，仮定より，$a_{n+1}=0.1a_n+0.3(1-a_n)$

変形すると，$a_{n+1}-\dfrac{1}{4}=-\dfrac{1}{5}\left(a_n-\dfrac{1}{4}\right)$

数列 $\left\{a_n-\dfrac{1}{4}\right\}$ は，初項 $\left(a_1-\dfrac{1}{4}\right)$，公比 $-\dfrac{1}{5}$ の等比数列であるから，

$a_n-\dfrac{1}{4}=\left(a_1-\dfrac{1}{4}\right)\left(-\dfrac{1}{5}\right)^{n-1}$　　$\therefore a_n=\dfrac{1}{4}+\left(a_1-\dfrac{1}{4}\right)\left(-\dfrac{1}{5}\right)^{n-1}$

よって，$\lim_{n\to\infty}a_n=\dfrac{1}{4}$ であるから，長い間には，この生徒は 25 %遅刻する。 $\boxed{答}$

(2021/4/5　ジョーカー)