● 問題399 解答＜三角定規＞

［問題１］

右 **図１** のように各点を定め，赤，青円の半径を 1，x とする。図形の対称性より赤，青円は**正三角形** A′BC′ に内外接するから，図の∠ OGF ＝ 30° で

$$\mathrm{OF}:\mathrm{OG}=1-x:1+x=1:2$$

$$\therefore\ x=\frac{1}{3}$$

このとき，白円の半径は $1-x=\dfrac{2}{3}$ だから

求める $\dfrac{青円}{白円}=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$ … [答]

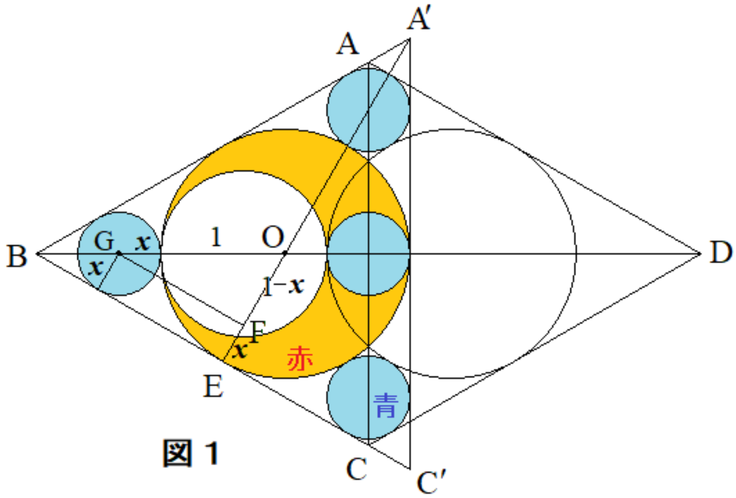

図１

［問題２］

右 **図２** のように各点を定め，青，黄，赤 3 円の半径を 1，x，y とすると

△ OAB について，三平方の定理より

$$x^2+x^2=(1-x)^2$$

$$\therefore\ x^2+2x-1=0$$

$x>0$ より $x=\sqrt{2}-1$ …①

△ OBC について，余弦定理より

$$(x+y)^2$$

$$=(1-x)^2+(1-y)^2-2(1-x)(1-y)\cos\frac{\pi}{4}$$

…②

②に①を代入し整理すると

$$1+y=\sqrt{2}(1-y)\quad\therefore\ y=3-2\sqrt{2}\quad\cdots③$$

次に，**図３** のように緑円の半径を z とし，角 α，β を定める。

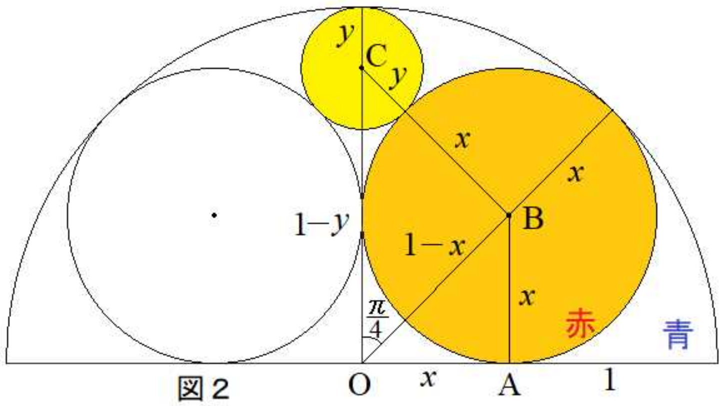

図２

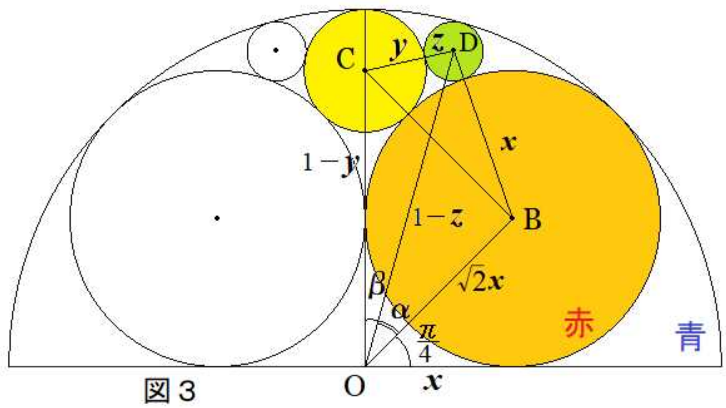

図３

△ OBD について，余弦定理より

$$(x+z)^2=(\sqrt{2}\,x)^2+(1-z)^2-2\sqrt{2}\,x(1-z)\cos\alpha\quad\cdots④$$

④に①を代入して整理し $\cos\alpha$ について解くと，結構な計算の末

$$\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}-1-z}{(\sqrt{2}-1)(1-z)}\quad\cdots⑤$$

△ OCD について, 余弦定理より

$$(y+z)^2=(1-y)^2+(1-z)^2-2(1-y)(1-z)\cos\beta \quad \cdots⑥$$

⑥に③を代入して整理し $\cos\beta$ について解くと, 再び結構な計算の末

$$\cos\beta=\frac{1-\sqrt{2}z}{1-z} \quad \cdots⑦$$

ここで, **図 3** の通り $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$ だから

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore\ (\sin\alpha\sin\beta)^2=\left(\cos\alpha\cos\beta-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$\therefore\ (1-\cos^2\alpha)(1-\cos^2\beta)=\cos^2\alpha\cos^2\beta-\sqrt{2}\cos\alpha\cos\beta+\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ \cos^2\alpha+\cos^2\beta-\sqrt{2}\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2} \quad \cdots⑧$$

⑧に⑤⑥を代入し

$$\frac{(\sqrt{2}-1-z)^2}{(\sqrt{2}-1)^2(1-z)^2}+\frac{(1-\sqrt{2}z)^2}{(1-z)^2}-\sqrt{2}\cdot\frac{(\sqrt{2}-1-z)(1-\sqrt{2}z)}{(\sqrt{2}-1)(1-z)^2}=\frac{1}{2} \quad \cdots⑨$$

⑨の分母を払い整理すると, 3 度目の結構な計算の末

$$(z-\sqrt{2}+1)(5z-\sqrt{2}+1)=0 \quad \cdots⑩$$

⑩より

$$z=\sqrt{2}-1,\quad \frac{\sqrt{2}-1}{5}$$

となるが, 前者は①より赤円の半径だから不適で, $z=\dfrac{\sqrt{2}-1}{5} \quad \cdots⑪$

以上より, 求める $\dfrac{\text{緑円}}{\text{赤円}}=\dfrac{z}{x}=\mathbf{\dfrac{1}{5}} \quad \cdots$ [答]

※ 以下, 求められてはいないが, ⑪を⑤⑦に戻すことで

$$\cos\alpha=\frac{2(6+\sqrt{2})}{17},\ \sin\alpha=\frac{8\sqrt{2}-3}{17},\ \cos\beta=\frac{20+9\sqrt{2}}{34},\ \sin\beta=\frac{3(5\sqrt{2}-4)}{34}$$

尚,「結構な計算」には, wolframalpha.com にかなり助けられました。