● 追加問題１　解答＜三角定規＞

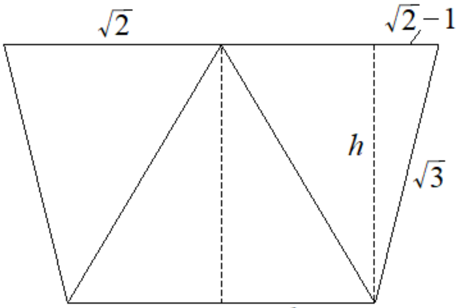

図１

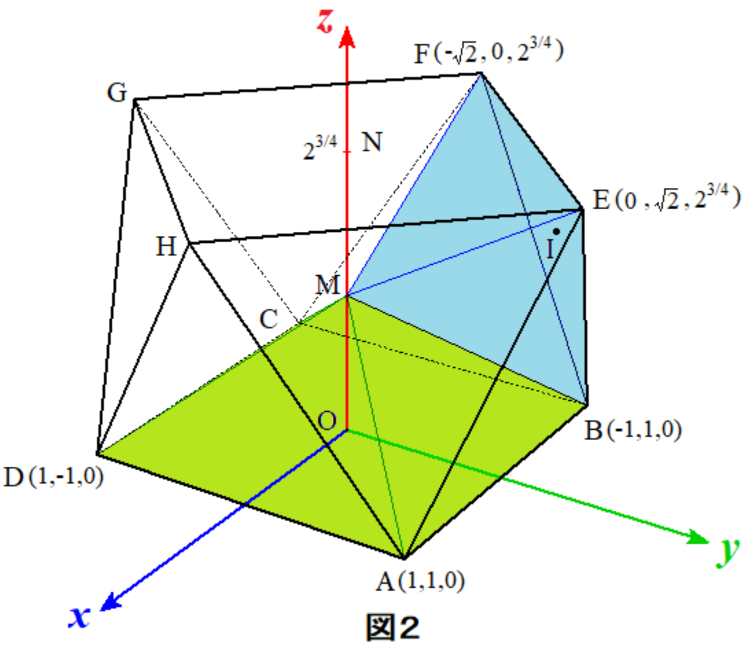

図２

[解答１]

立体は,

1 辺が 2 の正四角錐 2 つ

1 辺が 2 の正三角錐 8 つ

が組み合わされてできている。

真横から見ると上 **図１** のようになることから，立体の高さ h は,

$$h^2+(\sqrt{2}-1)^2=\sqrt{3}^{\,2} \quad \therefore\ h=\sqrt{2\sqrt{2}}=2^{3/4}$$

図２ のように各点及び座標軸･座標を定めると,

正四角錐は，底辺が 2，高さが $\dfrac{2^{3/4}}{2}$ だから，体積 $V_1=\dfrac{1}{3}\cdot 2^2\cdot\dfrac{2^{3/4}}{2}=\dfrac{2}{3}\cdot 2^{3/4}$

側面： △BEF の重心 I は $\mathrm{I}\left(\dfrac{-1-\sqrt{2}}{3},\ \dfrac{1+\sqrt{2}}{3},\ \dfrac{2}{3}\cdot 2^{3/4}\right)$ で，立体の中心 からの距離 MI は

$$\mathrm{MI}^2=2\left(\frac{1+\sqrt{2}}{3}\right)^2+\left(\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)2^{3/4}\right)^2=\ \cdots\ =\frac{4+3\sqrt{2}}{6} \quad \therefore\ \mathrm{MI}=\frac{\sqrt{4+3\sqrt{2}}}{\sqrt{6}}$$

三角錐 MBEF の体積 $V_2=\dfrac{1}{3}\triangle\mathrm{BEF}\cdot\mathrm{MI}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot 2^2\cdot\dfrac{\sqrt{4+3\sqrt{2}}}{\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{2}\sqrt{4+3\sqrt{2}}}{6}$

以上より，求める立体の体積 V は

$$V=2V_1+8V_2=\frac{4}{3}\cdot 2^{3/4}+\frac{4}{3}\sqrt{8+6\sqrt{2}}=\cdots=\boldsymbol{\frac{8}{3}\sqrt{4+3\sqrt{2}}} \quad (\fallingdotseq 7.66)\ \cdots[答]$$

※ 立方体の体積にほぼ等しいこの結果は，立方体からの“出っ張りと引っ込み”を考えると納得できる結果です。

[解答２]

立体の上底面と稜を共有する４つの側面を広げていくと，立体は**図３**のような四角錐 P−IJKL に包接される。

断面図 **図４** において

$\mathrm{NO}^2=\sqrt{3}^{\,2}-(\sqrt{2}-1)^2=2\sqrt{2}$ $\therefore$ $\mathrm{NO}=\sqrt{2\sqrt{2}}=2^{3/4}$

また，PO：PN＝$1:\sqrt{2}$，NO＝$2^{3/4}$ より

$\mathrm{PN}=(1+\sqrt{2})2^{3/4}$， $\mathrm{PO}=(2+\sqrt{2})2^{3/4}$，

四角錐 P-EFGL$=\frac{1}{3}\cdot 2^2\cdot(1+\sqrt{2})2^{3/4}$ …①

四角錐 P-IJKL$=\frac{1}{3}\cdot(2\sqrt{2})^2\cdot(2+\sqrt{2})2^{3/4}$ …②

四角錐台 EFGH-IJKL$=\frac{1}{3}\cdot(12+4\sqrt{2})2^{3/4}$ （∵ ②−①） …③

求める立体は，この四角錐台から三角錐 H-ADL ４つ分を除いたものだから

立体 EFGL−ABCD の体積 V は

$$V=\frac{1}{3}\cdot(12+4\sqrt{2})2^{3/4}-4\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}^{\,2}\cdot 2^{3/4}$$

$$=\frac{8+4\sqrt{2}}{3}\cdot 2^{3/4}$$

$$=\frac{\mathbf{8}}{\mathbf{3}}\sqrt{\mathbf{4+3\sqrt{2}}}$$ … [答]

（この結果は，当然〈解答 1〉と等しい）

※ 底面に平行な断面積を積分しようとして始まったのですが， 平面で囲まれた図形なので積分はいるまいと辿り着いたのがこの方法です。

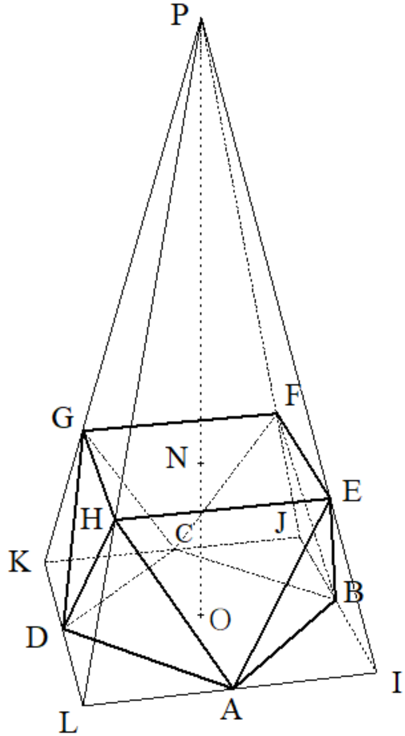

図３

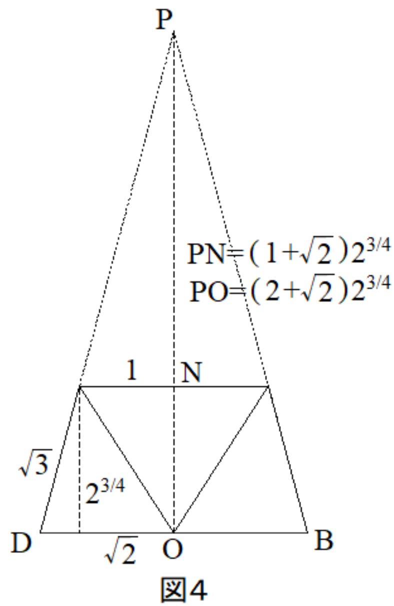

図４