● 追加問題 解答＜三角定規＞

$$f(a,\ b,\ c)=a^3+b^3+c^3-3abc \quad \cdots①$$

のとき

$$f(1,\ 2,\ 3)=1^3+2^3+3^3-3\cdot1\cdot2\cdot3=18=2\cdot3^2$$

$$f(4,\ 5,\ 6)=4^3+5^3+6^3-3\cdot4\cdot5\cdot6=45=3^2\cdot5$$

であるから，

$$f(1,\ 2,\ 3)\,f(4,\ 5,\ 6)=f(a,\ b,\ c)=2\cdot3^4\cdot5 \quad \cdots②$$

また，

$$f(a,\ b,\ c)=\frac{1}{2}(a+b+c)((b-a)^2+(c-b)^2+(c-a)^2)$$

$a\leqq b\leqq c$ として一般性を失わないから，$b-a=p$，$c-b=q$，$c-a=p+q$ $(p\geqq0,\ q\geqq0)$ とおくと

$$=\frac{1}{2}(3a+2p+q)(p^2+q^2+(p+q)^2)$$

$$=(3a+2p+q)(p^2+pq+q^2) \quad \cdots③$$

②③より，$(3a+2p+q)(p^2+pq+q^2)=2\cdot3^4\cdot5 \quad \cdots④$

④式左辺の形から $0\leqq q\leqq p$ としてよい。

(1) $q=0$ の場合

④より　$(3a+2p)\cdot p^2=2\cdot3^4\cdot5$　$\therefore\ p=1,\ 3,\ 9$

（ｉ）$p=1$ のとき　$3a+2=2\cdot3^4\cdot5$,　これは a が整数にならず不適。

（ⅱ）$p=3$ のとき　$3a+6=2\cdot3^2\cdot5$　$\therefore\ a=28$　このとき $b=c=31$　$\cdots⑤$

これは　$28^3+31^3+31^3-3\cdot28\cdot31\cdot31=810=2\cdot3^4\cdot5$　で，題意を満たす。

（ⅲ）$p=9$ のとき　$3a+18=10$,　これは不適。

(2) $q\geqq1$ かつ $p=q$ の場合

④より　$(3a+3q)\cdot3q^2=2\cdot3^4\cdot5$　$\therefore\ (a+q)\cdot q^2=2\cdot3^2\cdot5$　$\therefore\ q=1,\ 3$

（ｉ）$q=1$ のとき　$a+1=90$　$\therefore\ a=89$　このとき $b=90,\ c=91$　$\cdots⑥$

（ⅱ）$q=3$ のとき　$a+3=10$　$\therefore\ a=7$　このとき $b=10,\ c=13$　$\cdots⑦$

(2) $q\geqq1$ かつ $p=q+k$, $k\geqq1$ の場合

④に代入し，$(3a+2(q+k)+q)((q+k)^2+(q+k)q+q^2)=(3a+3q+2k)(3q^2+3kq+k^2)=2\cdot3^4\cdot5 \quad \cdots⑧$

⑧において $a=q=1$，$k=2$ のとき $3a+3q+2k=10$ となるが，

このとき $3q^2+3kq+k^2=13$ で⑧を満たさない。

よって $3a+3q+2k$ は 3 を因数にもち，このとき k は 3 の倍数になる。

$k=3m$ とおき⑧に代入し

$$(3a+3q+6m)(3q^2+9mq+9m^2)=2\cdot3^4\cdot5$$

$$\therefore\ (a+q+2m)(q^2+3mq+3m^2)=2\cdot3^2\cdot5 \quad \cdots⑨$$

⑨より $(a+q+2m,\ q^2+3mq+3m^2)=(5,\ 18),\ (6,\ 15),\ (9,\ 10),\ (10,\ 9)$ となるが,

これらは全て $a,\ q,\ m$ が自然数とならず不適である。

以上⑤⑥⑦より，②を満たす自然数 a, b, c は $a \leqq b \leqq c$ として

$(a, b, c)=$ **(7, 10, 13), (28, 31, 31), (89, 90, 91)** …[答]