第 401 回追加問題

8文字の baseball を横一列に並べる順列で，どのｂもａの左側にくる確率を求めよ。

解答

先ず，ａとｂとｌは2個ずつ，他は1ずつあるから，baseball の順列は，$\dfrac{8!}{2!2!2!1!1!}=5040$（通り）

次に，どのｂもａの左側にくる場合の数を場合分けして求める。

(1)　ａが左から3番目にくるとき，

$(b,b)-a-(a,e,l,l,s) \rightarrow 1\times\dfrac{5!}{2!}=60$（通り）

(2)　ａが左から4番目にくるとき，

$(b,b,e)-a-(a,l,l,s) \rightarrow 3\times\dfrac{4!}{2!}=36$（通り）

$(b,b,l)-a-(a,e,l,s) \rightarrow 3\times 4!=72$（通り）

$(b,b,s)-a-(a,e,l,l) \rightarrow 3\times\dfrac{4!}{2!}=36$（通り）　$\therefore 36+72+36=144$（通り）

(3)　ａが左から5番目にくるとき，

$(b,b,e,l)-a-(a,l,s) \rightarrow \dfrac{4!}{2!}\times 3!=72$（通り）

$(b,b,e,s)-a-(a,l,l) \rightarrow \dfrac{4!}{2!}\times 3=36$（通り）

$(b,b,l,l)-a-(a,e,s) \rightarrow \dfrac{4!}{2!2!}\times 3!=36$（通り）

$(b,b,l,s)-a-(a,e,l) \rightarrow \dfrac{4!}{2!}\times 3!=72$（通り）　$\therefore 72+36+36+72=216$（通り）

(4)　ａが左から6番目にくるとき，

$(b,b,l,l,s)-a-(a,e) \rightarrow \dfrac{5!}{2!2!}\times 2=60$（通り）

$(b,b,e,l,s)-a-(a,l) \rightarrow \dfrac{5!}{2!}\times 2=120$（通り）

$(b,b,e,l,l)-a-(a,s) \rightarrow \dfrac{5!}{2!2!}\times 2=60$（通り）　$\therefore 60+120+60=240$（通り）

(5)　ａが左から7番目にくるとき，

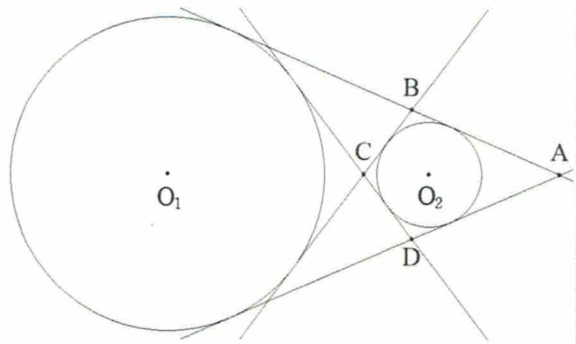
$(b,b,e,l,l,s)-a-(a) \rightarrow \dfrac{6!}{2!2!}\times 1=180$（通り）

以上，(1)～(5) より，$60+144+216+240+180=840$（通り）

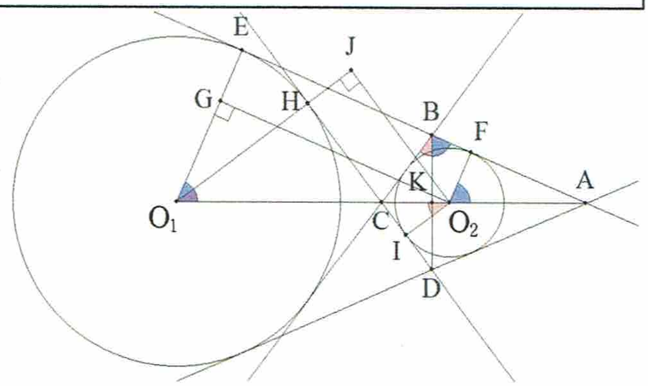
よって求める確率は，$\dfrac{840}{5040}=\dfrac{1}{6}$　答

追加問題 2

一方が他方の外部にある 2 円 O_1，O_2 の半径をそれぞれ r_1，r_2 （$r_1 > r_2$）とする。
2 円の共通接線の交点を，図のように A，B，C，D とし，$\angle ABD = \alpha$，$\angle CBD = \beta$ とする。
このとき，四角形 ABCD の面積 S を r_1，r_2，α，β を用いて表せ。



解答　$O_1O_2 = d$ （$d > r_1 + r_2$）とし，図のように，
共通外接線 AB と 2 円 O_1，O_2 との接点をそれぞれ E，F，
O_2 から O_1E に下した垂線の足を G，
共通内接線 CD と 2 円 O_1，O_2 との接点をそれぞれ H，I，
O_2 から O_1H の延長に下した垂線の足を J，BD と CA の交点を K とする。



仮定より，$\angle GO_1O_2 = \angle FO_2A = \angle KBA = \alpha$，
$\angle JO_1O_2 = \angle IO_2C = \angle KBC = \beta$ である。
直角三角形 GO_1O_2 の 3 辺は，
$O_1O_2 = d$，$O_1G = r_1 - r_2$，$O_2G = \sqrt{d^2 - (r_1 - r_2)^2}$ である。

$\triangle GO_1O_2 \backsim \triangle FO_2A$ で，$O_2F = r_2$ であるから，$O_2A = \dfrac{r_2 d}{r_1 - r_2}$　…①

直角三角形 JO_1O_2 の 3 辺は，$O_1O_2 = d$，$O_1J = r_1 + r_2$，$O_2J = \sqrt{d^2 - (r_1 + r_2)^2}$ である。

$\triangle JO_1O_2 \backsim \triangle IO_2C$ で，$O_2I = r_2$ であるから，$O_2C = \dfrac{r_2 d}{r_1 + r_2}$　…②

①，②より，$CA = \dfrac{r_2 d}{r_1 - r_2} + \dfrac{r_2 d}{r_1 + r_2} = \dfrac{2 r_1 r_2 d}{(r_1 - r_2)(r_1 + r_2)}$　…③

次に，$\angle KBA = \alpha$，$\angle KBC = \beta$ であるから，
$KA = BK \tan\alpha$，$CK = BK \tan\beta$ より，$CA = KA + CK = BK(\tan\alpha + \tan\beta)$　…④

③，④より $BK = \dfrac{2 r_1 r_2 d}{(r_1 - r_2)(r_1 + r_2)} \cdot \dfrac{1}{\tan\alpha + \tan\beta}$

このとき，$S = \dfrac{1}{2} CA \times BD = CA \times BK = \dfrac{2 r_1 r_2 d}{(r_1 - r_2)(r_1 + r_2)} \times \dfrac{2 r_1 r_2 d}{(r_1 - r_2)(r_1 + r_2)} \cdot \dfrac{1}{\tan\alpha + \tan\beta}$

$$= \frac{4 r_1{}^2 r_2{}^2 d^2}{(r_1 - r_2)^2 (r_1 + r_2)^2} \cdot \frac{1}{\tan\alpha + \tan\beta} \quad \cdots⑤$$

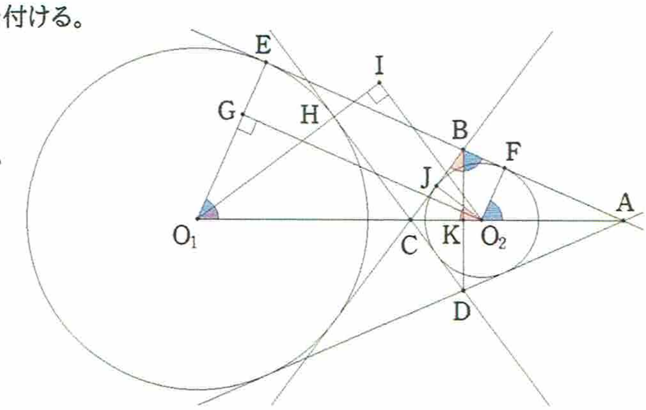
ここで，$\dfrac{1}{\tan\alpha + \tan\beta} = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{\tan^2\alpha - \tan^2\beta} = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{(1 + \tan^2\alpha) - (1 + \tan^2\beta)} = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{\dfrac{1}{\cos^2\alpha} - \dfrac{1}{\cos^2\beta}}$

この式に，$\cos\alpha = \dfrac{r_1 - r_2}{d}$，$\cos\beta = \dfrac{r_1 + r_2}{d}$ を代入すると，

$$\frac{1}{\tan\alpha + \tan\beta} = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{\dfrac{d^2}{(r_1 - r_2)^2} - \dfrac{d^2}{(r_1 + r_2)^2}} = \frac{(r_1 - r_2)^2 (r_1 + r_2)^2}{4 d^2 r_1 r_2} (\tan\alpha - \tan\beta)$$

これを⑤に代入すると，$S=\dfrac{4{r_1}^2{r_2}^2d^2}{(r_1-r_2)^2(r_1+r_2)^2}\cdot\dfrac{(r_1-r_2)^2(r_1+r_2)^2}{4d^2r_1r_2}(\tan\alpha-\tan\beta)=r_1r_2(\tan\alpha-\tan\beta)$　答

別解　$O_1O_2=d$　$(d>r_1+r_2)$ とし，図のように記号を付ける。



仮定より，$\angle GO_1O_2=\angle FO_2A=\angle KBA=\alpha$,

$\angle IO_1O_2=\angle JO_2C=\angle KBC=\beta$ である。

直角三角形 GO_1O_2 の3辺は，$O_1O_2=d$，$O_1G=r_1-r_2$，

$O_2G=\sqrt{d^2-(r_1-r_2)^2}$ であるから,

$\cos\alpha=\dfrac{r_1-r_2}{d}$，$\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{d^2-(r_1-r_2)^2}}{d}$，

$\tan\alpha=\dfrac{\sqrt{d^2-(r_1-r_2)^2}}{r_1-r_2}$

直角三角形 IO_1O_2 の3辺は，$O_1O_2=d$，$O_1I=r_1+r_2$，$O_2I=\sqrt{d^2-(r_1+r_2)^2}$ であるから,

$\cos\beta=\dfrac{r_1+r_2}{d}$，$\sin\beta=\dfrac{\sqrt{d^2-(r_1+r_2)^2}}{d}$，$\tan\beta=\dfrac{\sqrt{d^2-(r_1+r_2)^2}}{r_1-r_2}$

$S=\triangle ABC\times2=2(\triangle AFO_2+\triangle CJO_2+\triangle O_2FB\times2)$

$=2\left\{\dfrac{1}{2}r_2\cdot r_2\tan\alpha+\dfrac{1}{2}r_2\cdot r_2\tan\beta+2\times\dfrac{1}{2}r_2\cdot r_2\tan\dfrac{\pi-(\alpha+\beta)}{2}\right\}={r_2}^2\left\{\tan\alpha+\tan\beta+2\tan\dfrac{\pi-(\alpha+\beta)}{2}\right\}$

ここで，$\tan\dfrac{\pi-(\alpha+\beta)}{2}=\dfrac{1}{\tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}}=\dfrac{1+\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}=\dfrac{1+\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}$

これに,

$\cos\alpha=\dfrac{r_1-r_2}{d}$，$\cos\beta=\dfrac{r_1+r_2}{d}$，$\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{d^2-(r_1-r_2)^2}}{d}$，$\sin\beta=\dfrac{\sqrt{d^2-(r_1+r_2)^2}}{d}$ を代入すると,

$$\tan\frac{\pi-(\alpha+\beta)}{2}=\frac{1+\dfrac{r_1-r_2}{d}\cdot\dfrac{r_1+r_2}{d}-\dfrac{\sqrt{d^2-(r_1-r_2)^2}}{d}\cdot\dfrac{\sqrt{d^2-(r_1+r_2)^2}}{d}}{\dfrac{\sqrt{d^2-(r_1-r_2)^2}}{d}\cdot\dfrac{r_1+r_2}{d}+\dfrac{r_1-r_2}{d}\cdot\dfrac{\sqrt{d^2-(r_1+r_2)^2}}{d}}$$

$$=\frac{d^2+{r_1}^2-{r_2}^2+\sqrt{d^2-(r_1-r_2)^2}\sqrt{d^2-(r_1+r_2)^2}}{(r_1+r_2)\sqrt{d^2-(r_1-r_2)^2}+(r_1-r_2)\sqrt{d^2-(r_1+r_2)^2}}$$

$$=\frac{\left\{d^2+{r_1}^2-{r_2}^2+\sqrt{d^2-(r_1-r_2)^2}\sqrt{d^2-(r_1+r_2)^2}\right\}\left\{(r_1+r_2)\sqrt{d^2-(r_1-r_2)^2}-(r_1-r_2)^2\sqrt{d^2-(r_1+r_2)^2}\right\}}{(r_1+r_2)^2\{d^2-(r_1-r_2)^2\}-(r_1-r_2)^2\{d^2-(r_1+r_2)^2\}}$$

$$=\frac{2d^2r_1\sqrt{d^2-(r_1-r_2)^2}-2d^2r_1\sqrt{d^2-(r_1+r_2)^2}}{4d^2r_1r_2}=\frac{\sqrt{d^2-(r_1-r_2)^2}-\sqrt{d^2-(r_1+r_2)^2}}{2r_2}$$

よって,

$$S={r_2}^2\left\{\frac{\sqrt{d^2-(r_1-r_2)^2}}{r_1-r_2}+\frac{\sqrt{d^2-(r_1+r_2)^2}}{r_1+r_2}+2\cdot\frac{\sqrt{d^2-(r_1-r_2)^2}-\sqrt{d^2-(r_1+r_2)^2}}{2r_2}\right\}$$

$$=r_2\left\{\frac{r_2}{r_1-r_2}\sqrt{d^2-(r_1-r_2)^2}+\frac{r_2}{r_1+r_2}\sqrt{d^2-(r_1+r_2)^2}+\sqrt{d^2+(r_1-r_2)^2}-\sqrt{d^2-(r_1+r_2)^2}\right\}$$

$$=r_2\left\{\frac{r_1}{r_1-r_2}\sqrt{d^2-(r_1-r_2)^2}-\frac{r_1}{r_1+r_2}\sqrt{d^2-(r_1+r_2)^2}\right\}$$

$$=r_1r_2\left\{\frac{\sqrt{d^2-(r_1-r_2)^2}}{r_1-r_2}-\frac{\sqrt{d^2-(r_1+r_2)^2}}{r_1+r_2}\right\}=r_1r_2(\tan\alpha-\tan\beta)$$　答

補足 $O_1(r_1)$，$O_2(r_2)$，$O_1O_2=d$ が与えられたときは，

$\tan\alpha=\dfrac{\sqrt{d^2-(r_1-r_2)^2}}{r_1-r_2}$，$\tan\beta=\dfrac{\sqrt{d^2-(r_1+r_2)^2}}{r_1+r_2}$ を代入して，

$$S=r_1r_2\left\{\frac{\sqrt{d^2-(r_1-r_2)^2}}{r_1-r_2}-\frac{\sqrt{d^2-(r_1+r_2)}}{r_1+r_2}\right\}$$

(2021/5/30, 2021/6/6　ジョーカー)