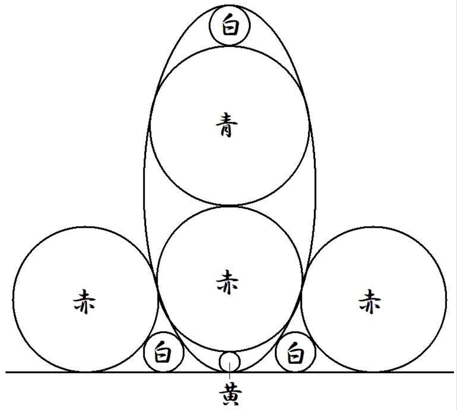
明星輪寺三ノ段

一直線に楕円，赤円２個，白円２個と黄円が接している。
楕円内で黄，赤，青，白円が互いに外接して楕円に接している。そして楕円内の赤円とその外の赤円は外接して共に楕円に接している。
青円の直径が最大に与えられたとき黄色の円の直径を求めよ。
出題者　河合澤　女　行年十六歳

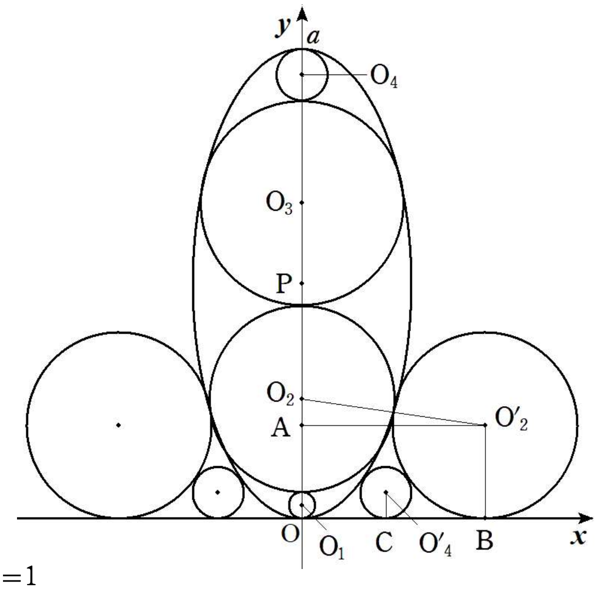
術文（答）　黄色円は青円÷３



解答　与えられた図形は，楕円の長軸に関して左右対称であるから，右半分について記号を付けて考える。
楕円，赤円２個，白円２個と黄円が接している直線を x 軸，楕円の長軸を y 軸の正の部分にとる。楕円の中心をP，長軸を $2a$，短軸を $2b$ とおくと，楕円の方程式は,

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{(y-a)^2}{a^2}=1 \quad (a>b) \quad \cdots①$$

楕円内の円を下から順に，黄，赤，青，白円の中心（半径）をそれぞれ $O_1(r_1)$，$O_2(r_2)$，$O_3(r_3)$，$O_4(r_4)$，楕円外の赤白円の中心（半径）をそれぞれ $O'_2(r_2)$，$O'_4(r_4)$ とおく。
楕円内の４円は長軸に並ぶから，$r_1+r_2+r_3+r_4=a \quad \cdots②$
円 O_2 の方程式は，$x^2+(y-2r_1-r_2)^2=r_2{}^2 \quad \cdots③$



①，③から x^2 を消去すると，$\dfrac{r_2{}^2-(y-2r_1-r_2)^2}{b^2}+\dfrac{(y-a)^2}{a^2}=1$

分母を払って整理すると，$(a^2-b^2)y^2-2a(2ar_1+ar_2-b^2)y+4a^2r_1(r_1+r_2)=0$
この y についての２次方程式の判別式を D とすると，①と③は接するから，$D=0$ である。

$\dfrac{D}{4}=a^2(ar_2+2ar_1-b^2)^2-(a^2-b^2)\cdot 4a^2r_1(r_1+r_2)=a^2\{(2br_1)^2-2b(a-r_2)(2br_1)+(b^2-ar_2)^2\}=0$ より,

$2br_1=b(a-r_2)\pm\sqrt{b^2(a-r_2)^2-(b^2-ar_2)^2}=b(a-r_2)\pm\sqrt{(a^2-b^2)(b^2-r_2{}^2)}$

題意に適するのは，$r_1=\dfrac{b(a-r_2)-\sqrt{(a^2-b^2)(b^2-r_2{}^2)}}{2b}$

変形すると，$a-2r_1-r_2=\dfrac{\sqrt{(a^2-b^2)(b^2-r_2{}^2)}}{b} \quad \cdots④$

④の左辺は，PO_2（楕円と円 O_2 の中心間の距離）に一致する。

同様に，楕円と円 O_3 の中心間の距離は，$PO_3=a-r_3-2r_4=\dfrac{\sqrt{(a^2-b^2)(b^2-r_3{}^2)}}{b} \quad \cdots⑤$

O'_2 から y 軸に下した垂線の足を A とすると，$O_2O'_2=2r_2$，$O_2A=2r_1$ であるから,
$\triangle O_2AO'_2$ に三平方の定理を適用して，$AO'_2=2\sqrt{r_2{}^2-r_1{}^2}$
$O_2(0,\ 2r_1+r_2)$，$O'_2(2\sqrt{r_2{}^2-r_1{}^2},\ r_2)$ となるから，その中点の座標は，$(\sqrt{r_2{}^2-r_1{}^2},\ r_1+r_2)$

この中点は楕円上にあるから，①に代入して， $\dfrac{r_2{}^2-r_1{}^2}{b^2}+\dfrac{(r_1+r_2-a)^2}{a^2}=1$ …⑥

④，⑥を連立させて解くと，題意に適するのは， $r_1=\dfrac{b^2(a^2-b^2)}{a(a^2+3b^2)}$，$r_2=\dfrac{b^2(3a^2+b^2)}{a(a^2+3b^2)}$

このとき，$\sqrt{r_2{}^2-r_1{}^2}=\dfrac{2\sqrt{2}\,b^2\sqrt{a^2+b^2}}{a^2+3b^2}$，$r_1+r_2=\dfrac{4ab^2}{a^2+3b^2}$ …⑦である。

⑦を，②に代入すると，$\dfrac{4ab^2}{a^2+3b^2}+r_3+r_4=a$ …⑧

⑤，⑧を連立させて解くと，題意に適するのは，$r_3=\dfrac{b^2(5a^2-9b^2)}{a(a^2+3b^2)}$，$r_4=\dfrac{(a^2-3b^2)^2}{a(a^2+3b^2)}$

青円の直径 $2r_3$ が最大に与えられるとあるから，r_3 が最大になるときの a，b の比を求める。

$\dfrac{b}{a}=t$ （$0<t<1$）とおき，$r_3=\dfrac{b^2(5a^2-9b^2)}{a(a^2+3b^2)}=\dfrac{bt(5-9t^2)}{1+3t^2}=f(t)$ とおく。

まず，関数 $f(t)=\dfrac{bt(5-9t^2)}{1+3t^2}$ の定義域を調べる。$f(t)>0$ より，$t<\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ …⑨

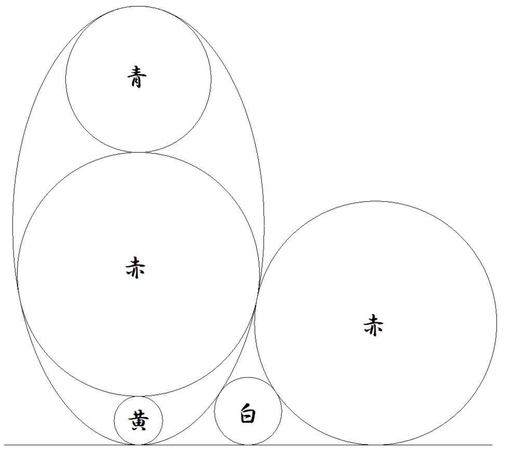
黄，白円は楕円の長軸の端で楕円に接する円である。その円の半径の最大値は，$\dfrac{b^2}{a}$ であるから，

$r_1=\dfrac{b^2(a^2-b^2)}{a(a^2+3b^2)}\leqq\dfrac{b^2}{a}$，$r_4=\dfrac{(a^2-3b^2)^2}{a(a^2+3b^2)}\leqq\dfrac{b^2}{a}$ でなければならない。

前者は常に成り立つ。後者から，$a^2\leqq 6b^2$ より，$\dfrac{1}{\sqrt{6}}\leqq t$ …⑩

⑨，⑩より，定義域は，$\dfrac{1}{\sqrt{6}}\leqq t<\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

$f'(t)=b\cdot\dfrac{(1-3t^2)(5+t^2)}{(1+3t^2)^2}=0$ とおくと，$t=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$



t	$\dfrac{1}{\sqrt{6}}$	…	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	…	$\dfrac{\sqrt{5}}{3}$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	$\dfrac{7}{3\sqrt{6}}b$	↗	$\dfrac{b}{\sqrt{3}}$	↘	0

増減表により，$t=\dfrac{b}{a}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき，r_3 は最大になる。

このとき，

$r_1=\dfrac{b^2(a^2-b^2)}{a(a^2+3b^2)}=\dfrac{b}{3\sqrt{3}}$，$r_2=\dfrac{b^2(3a^2+b^2)}{a(a^2+3b^2)}=\dfrac{5b}{3\sqrt{3}}$，$r_3=\dfrac{b^2(5a^2-9b^2)}{a(a^2+3b^2)}=\dfrac{b}{\sqrt{3}}$，$r_4=\dfrac{(a^2-3b^2)^2}{a(a^2+3b^2)}=0$

$r_4=0$ より，楕円内の白円はなくなり，$\dfrac{r_1}{r_3}=\dfrac{2r_1}{2r_3}=\dfrac{1}{3}$ であるから，黄円の直径は青円の直径×$\dfrac{1}{3}$ 答

（この場合の参考図は右上）

(2021/6/28　ジョーカー)