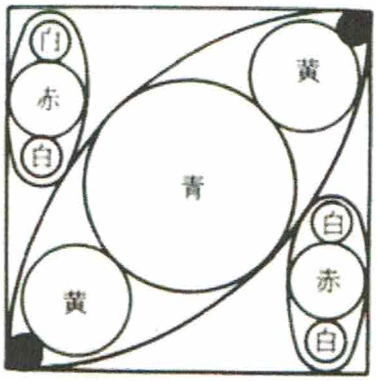
第404回

第四問題

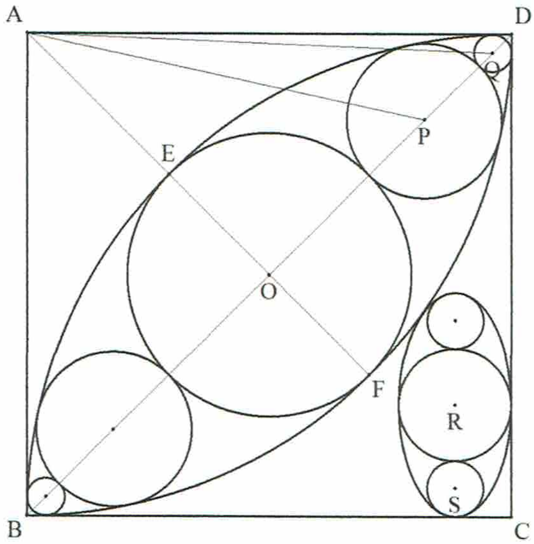
正方形内に四分円弧を書き，その内に円弧に接する最大な青円を書き，順次に接する黄，黒円を二個ずつ入れる。
そして正方形の二辺に長軸と短軸がそれぞれ平行になるような楕円が正方形と円弧に接している。
その楕円に内接する最大な赤円を書き，この赤円と楕円の長軸の端でこの楕円に接する円を白円とする。
黒円が与えられているとし，白円が最大となるような楕円の長軸の長さを求めよ。



術文（答）

長軸＝$\sqrt{2}(17+\sqrt{2})(3+\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{6})$(黒径)

解答　黒円と長軸の比を求めるので，正方形の１辺を１として計算しても，比は変わらない。また，与えられた図より，赤径は短軸に等しいから，図のように記号を付け，青円 O(r_1)，黄円 P(r_2)，黒円 Q(r_3)，赤円 R(a)，白円 S(b) とおく。
このとき，楕円の短軸は $2a$，長軸は $2a+4b$ となる。



$\mathrm{AE}=\mathrm{AO}-\mathrm{EO}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}-r_1$　…①

$\mathrm{AE}=\mathrm{AF}-\mathrm{EF}=1-2r_1$　…②

①，②より，$\dfrac{\sqrt{2}}{2}-r_1=1-2r_1$

$\therefore r_1=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$　（≒ 0.292893）　…③

△AOP において，$\mathrm{AO}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\mathrm{OP}=r_1+r_2$，$\mathrm{PA}=1-r_2$

三平方の定理により，$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+(r_1+r_2)^2=(1-r_2)^2$

$r_2=\dfrac{\frac{1}{2}-r_1^2}{2(1+r_1)}$　これに③を代入して，$r_2=\dfrac{3\sqrt{2}-2}{14}$　（≒ 0.160189）　…④

△AOQにおいて，$\mathrm{AO}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\mathrm{OQ}=r_1+2r_2+r_3$，$\mathrm{PA}=1-r_3$

三平方の定理により，$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+(r_1+2r_2+r_3)^2=(1-r_3)^2$

$r_3=\dfrac{\frac{1}{2}-(r_1+2r_2)^2}{2(1+r_1+2r_2)}$　これに③，④を代入して，$r_3=\dfrac{17\sqrt{2}-2}{574}$　（≒ 0.0384001）　…⑤

次に，楕円の長軸 $2a+4b$，短軸 $2a$ で，円 S は楕円の曲率円であるから，$b=\dfrac{a^2}{a+2b}$ より，$\therefore b=\dfrac{1}{2}a$　…⑥

Oを原点として座標平面で考える。

4分円弧ABDの方程式は，$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=1$

$-\frac{1}{2}\leqq x\leqq\frac{1}{2}$， $-\frac{1}{2}\leqq y\leqq\frac{1}{2}$ より，$y=\frac{1}{2}-\sqrt{1-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}$ …⑦

楕円の長軸 $4a$，短軸 $2b$，$\mathrm{S}\left(\frac{1}{2}-a,\ 2a-\frac{1}{2}\right)$ であるから方程式は，$\dfrac{\left(x-\frac{1}{2}+a\right)^2}{a^2}+\dfrac{\left(y-2a+\frac{1}{2}\right)^2}{(2a)^2}=1$

分母を払うと，$4\left(x-\frac{1}{2}+a\right)^2+\left(y-2a+\frac{1}{2}\right)^2=4a^2$ …⑧

⑦を⑧に代入して整理すると，$12x^2+4(-5+8a)x+11-32a+16a^2=4(1-2a)\sqrt{3-4x-4x^2}$

両辺を2乗して左辺に移項すると，

$144x^4+96(-5+8a)x^3+8(91-288a+208a^2)x^2+8(-47+216a-304a^2+128a^3)x+73-512a+1184a^2$
$-1024a^3+256a^4=0$

これに，$x=\frac{2z-(-5+8a)}{6}$ を代入すると，$z^4+lz^2+mz+n=0$ …⑨となる。

ただし，$l=8(1-3a+a^2)$， $m=-32(-1+a)(-1+2a)^2$， $n=16(-1+a)^2(2-12a+17a^2)$ …⑩である。

⑦と⑧は接するから，⑨は重解をもつ。

重解をもつ条件（*）は，$16l^4n-4l^3m^2-128l^2n^2+144lm^2n-27m^4+256n^3=0$ である。

これに，⑩を代入して因数分解すると，$-9437184(-1+a)^2(-1+2a)^6(1-12a+32a^2-24a^3+4a^4)=0$

$0<a<\frac{1}{4}$ であるから，$4a^4-24a^3+32a^2-12a+1=0$

変形すると，$(2a^2-6a)^2=4a^2+12a-1$

両辺に $2c(2a^2-6a)+c^2$ を加えると，$(2a^2-6a+c)^2=4(c+1)a^2+12(1-c)a+c^2-1$

$c=1$ のとき，$(2a^2-6a+1)^2=8a^2$ $\quad 2a^2-6a+1=\pm2\sqrt{2}a$ $\quad 2a^2-2(3\pm\sqrt{2})a+1=0$

$\frac{D}{4}=(3\pm\sqrt{2})^2-2=9\pm6\sqrt{2}=(\sqrt{6}\pm\sqrt{3})^2$

$a=\dfrac{3\pm\sqrt{2}+(\sqrt{6}\pm\sqrt{3})}{2}$，$\dfrac{3\pm\sqrt{2}-(\sqrt{6}\pm\sqrt{3})}{2}$ （複号同順）

この中で，$0<a<\frac{1}{4}$ を満たすのは，$a=\dfrac{3+\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{6}}{2}$ （≒ 0.116337）

最後に⑥に代入して，$b=\dfrac{3+\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{6}}{4}$ （≒ 0.0581683）

よって，黒径 $2r_3=\dfrac{17\sqrt{2}-2}{287}$，長軸：$2a+4b=4a=2(3+\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{6})$ であるから，黒径と長軸の比を計算

すると，$\dfrac{2a+4b}{2r_3}=\dfrac{2(3+\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{6})}{\frac{17\sqrt{2}-2}{287}}=\sqrt{2}(17+\sqrt{2})(3+\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{6})$

よって，長軸$=\sqrt{2}(17+\sqrt{2})(3+\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{6})$(黒径) 答

補足 $\sqrt{2}(17+\sqrt{2})(3+\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{6})$ （≒ 6.059918）

(*)

4 次方程式 $x^4+lx^2+mx+n=0$ が重解をもつ条件は,
$16l^4n-4l^3m^2-128l^2n^2+144lm^2n-27m^4+256n^3=0$ である。

証明　$f(x)=x^4+lx^2+mx+n$ とおくと，$f'(x)=4x^3+2lx+m$ である。

重解を α とおくと，$f(\alpha)=f'(\alpha)=0$ であるから，

$\alpha^4+l\alpha^2+\alpha x+n=0$　…①　$4\alpha^3+2l\alpha+m=0$　…②

この 2 式から α を消去する。

①× 4 −②× α より，$2l\alpha^3+3m\alpha+4n=0$　…③

②× l −③× 2α より，$-6m\alpha^2+(2l^2-8n)\alpha+lm=0$　…④

③× $3m$ −④× l より，$(2l^3-8ln+9m^2)\alpha+l^2m+12mn=0$　…⑤

④× $(2l^3-8ln+9m^2)$ +⑤× $6m\alpha$ より，

$4l(l^4+6lm^2-8l^2n+16n^2)\alpha+lm(2l^3-8ln+9m^2)=0$

$\therefore l=0$，$4(l^4+6lm^2-8l^2n+16n^2)\alpha+m(2l^3-8ln+9m^2)=0$

[1]　$l=0$ のとき

①，②より，α を消去すると，$-27m^4+256n^3=0$　…⑥

[2]　$4(l^4+6lm^2-8l^2n+16n^2)\alpha+m(2l^3-8ln+9m^2)=0$ のとき，

$4(l^4+6lm^2-8l^2n+16n^2)\alpha+m(2l^3-8ln+9m^2)=0$　…⑦

⑤× $4(l^4+6lm^2-8l^2n+16n^2)$ −⑦× $(2l^3-8ln+9m^2)$ より，

$3m(16l^4n-4l^3m^2-128l^2n^2+144lm^2n-27m^4+256n^3)=0$

$\therefore m=0$，$16l^4n-4l^3m^2-128l^2n^2+144lm^2n-27m^4+256n^3=0$

[2−1]　$m=0$ のとき，

①，②より，α を消去すると，$l^2-4n=0$　…⑧

[2−2]　$16l^4n-4l^3m^2-128l^2n^2+144lm^2n-27m^4+256n^3=0$ のとき，

これは重解をもつ条件となる。

この式で，$l=0$ とおくと，$-27m^4+256n^3=0$ となり，⑥が得られる。

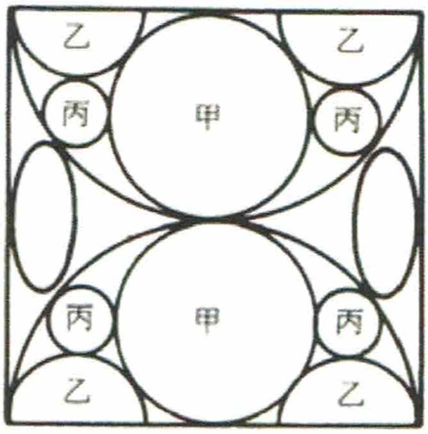
　　　　$m=0$ とおくと，$16n(l^2-4n)^2=0$ となり，⑧が得られる。

以上から，重解をもつ条件は，$16l^4n-4l^3m^2-128l^2n^2+144lm^2n-27m^4+256n^3=0$　終

補足　この式は覚えづらいが，m について整理すると，$27m^4+4l(l^2-36n)m^2-16n(l^2-4n)^2=0$ となる。

第５問題

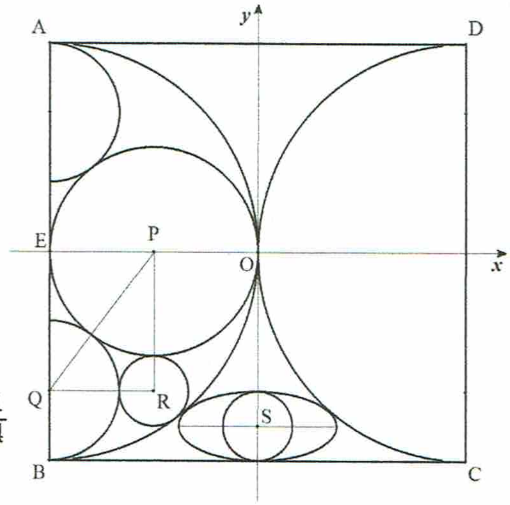
与えられた正方形の内に二個の半円弧を書き楕円と甲乙丙の十個の円を入れる（乙円は半円である）。
楕円の短径が丙円の直径に等しいとき楕円の長径を求めよ。



術文（答）　正方形の一辺の長さを $2r$ として，

$$\sqrt{\frac{299-41\sqrt{41}}{240}}\,r$$

解答　煩雑さを避けるため，正方形の１辺を１として計算する。
図のように 90° 回転した図の左半分について考える。
甲乙丙丁の半径をそれぞれ r_1，r_2，r_3，r_4，楕円の長軸を $2a$，短軸を $2r_4$ とおき，図のように記号を付ける。



$r_1=\dfrac{1}{2}$，$r_2=\dfrac{1}{2}r_1=\dfrac{1}{4}$ は容易に分かる。

△PEQ において，PE$=\dfrac{1}{4}$，EQ$=\dfrac{1}{2}-r_3$，QP$=r_3+\dfrac{1}{4}$

三平方の定理により，$\left(\dfrac{1}{4}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}-r_3\right)^2=\left(r_3+\dfrac{1}{4}\right)^2$　$\therefore r_3=\dfrac{1}{6}$

△PQRにおいて，PQ$=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{5}{12}$，QR$=\dfrac{1}{6}+r_4$，RP$=r_4+\dfrac{1}{4}$

三平方の定理により，$\left(\dfrac{5}{12}\right)^2=\left(\dfrac{1}{6}+r_4\right)^2+\left(r_4+\dfrac{1}{4}\right)^2$

$24r_4{}^2+10r_4-1=0$　$(2r_4+1)(12r_4-1)=0$　$r_4>0$ より，$r_4=\dfrac{1}{12}$

楕円の長軸 $2a$，短軸 $2\cdot\dfrac{1}{12}$，S$\left(0,\ -\dfrac{5}{12}\right)$ であるから，楕円の方程式は，$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{\left(y+\frac{5}{12}\right)^2}{\left(\frac{1}{12}\right)^2}=1$

$\therefore x^2+a^2(12y+5)^2=a^2$　…①

また，右側の甲半円の方程式は，$\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$　（$x\leqq\dfrac{1}{2}$）　$\therefore x=\dfrac{1}{2}-\sqrt{\dfrac{1}{4}-y^2}$　…②

②を①に代入すると，$\left(\dfrac{1}{2}-\sqrt{\dfrac{1}{4}-y^2}\right)^2+a^2(12y+5)^2=a^2$

展開して移項すると，$(144a^2-1)y^2+120a^2y+24a^2-\dfrac{1}{2}=\sqrt{\dfrac{1}{4}-y^2}$

両辺を２乗して整理すると，

$(144a^2-1)^2y^4+240a^2(144a^2-1)y^3+96a^2(222a^2+1)y^2+120a^2(48a^2+1)y+24a^2(24a^2+1)=0$

両辺に $(144a^2-1)^2$ を掛け，$(144a^2-1)y=z$ とおくと，

$z^4+240a^2z^3+96a^2(222a^2+1)z^2+120a^2(48a^2+1)(144a^2-1)z+24a^2(24a^2+1)(144a^2-1)^2=0$

$z=w-60a^2$ を代入すると，$w^4+lw^2+mw+n=0$　…③

ここに，$l=-96a^2(3a^2-1)$，$m=-120a^2$，$n=24a^2(864a^6-576a^4+36a^2+1)$ …④である。

①と②が接するとき，③は重解をもつ。

④が重解をもつ条件は，$16l^4n-4l^3m^2-128l^2n^2+144lm^2n-27m^4+256n^3=0$ …⑤である。（∵前問＊）

④を⑤に代入して因数分解すると，$-110592a^6(144a^2-1)^2(1440a^4-897a^2+32)=0$

$\dfrac{1}{12}<a<\dfrac{1}{4}$ であるから，$1440a^4-897a^2+32=0$ より，$a=\dfrac{1}{8}\sqrt{\dfrac{299-41\sqrt{41}}{15}}$

$2a=\dfrac{1}{4}\sqrt{\dfrac{299-41\sqrt{41}}{15}}=\sqrt{\dfrac{299-41\sqrt{41}}{240}}$

よって，正方形の1辺rが与えられたときは，長軸 $2a=\sqrt{\dfrac{299-41\sqrt{41}}{240}}\,r$ 答

補足 $\dfrac{1}{4}\sqrt{\dfrac{299-41\sqrt{41}}{15}}\fallingdotseq 0.389829$

注意 術文（答）では正方形の1辺を$2r$として長軸$=\sqrt{\dfrac{299-41\sqrt{41}}{240}}\,r$としてあるが，印刷ミスである。

正しくは，長軸$=\sqrt{\dfrac{299-41\sqrt{41}}{240}}\cdot 2r=\sqrt{\dfrac{299-41\sqrt{41}}{60}}\,r$となる。

長軸$=\sqrt{\dfrac{299-41\sqrt{41}}{240}}\,r$となるのは，正方形の1辺を$r$としたときである。

（2021/8/22　ジョーカー）