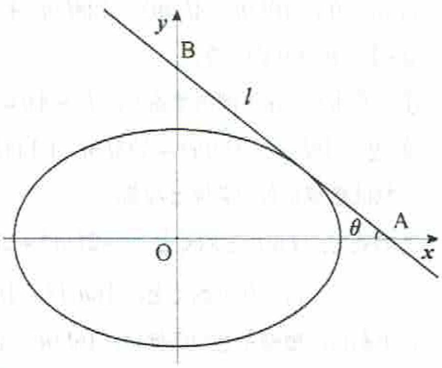
第404回　追加問題

1

公式

楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ の接線 l と x 軸とのなす角が θ のとき，
接線 l と x 軸，y 軸との交点をそれぞれA，Bとすると，
$\mathrm{OA}=\sqrt{a^2\tan^2\theta+b^2}$，$\mathrm{OB}=\sqrt{a^2+b^2cot^2\theta}$
である。



証明　B$(0,\ c)$ とおくと，接線 l の方程式は，$y=x\tan\theta+c$

これを $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ に代入して，$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{(x\tan\theta+c)^2}{b^2}=1$

分母を払って整理すると，$(a^2\tan^2\theta+b^2)x^2+2a^2cx\tan\theta+a^2(c^2-b^2)=0$

x についての2次方程式の判別式を D とおくと，楕円と接線 l が接するから，$D=0$ である。

$\dfrac{D}{4}=(2a^2c\tan\theta)^2-(a^2\tan^2\theta+b^2)\cdot a^2(c^2-b^2)=a^2b^2(a^2\tan^2\theta+b^2-c^2)=0$ より，

$c^2=a^2\tan^2\theta+b^2$　$\therefore c=\pm\sqrt{a^2\tan^2\theta+b^2}$　よって，$\mathrm{OB}=\sqrt{a^2\tan^2\theta+b^2}$

このとき，l の方程式は，$y=x\tan\theta\pm\sqrt{a^2\tan^2\theta+b^2}$

$y=0$ とおくと，$x=\mp\dfrac{\sqrt{a^2\tan^2\theta+b^2}}{\tan\theta}=\mp\sqrt{a^2+b^2cot^2\theta}$　よって，$\mathrm{OA}=\sqrt{a^2+b^2cot^2\theta}$　終

2

補題

4次方程式 $x^4+lx^2+mx+n=0$ が重解をもつ条件は，$16l^4n-4l^3m^2-128l^2n^2+144lm^2n-27m^4+256n^3=0$
である。

証明　$f(x)=x^4+lx^2+mx+n$ とおくと，$f'(x)=4x^3+2lx+m$ である。

重解を α とおくと，$f(\alpha)=f'(\alpha)=0$ であるから，

$\alpha^4+l\alpha^2+\alpha x+n=0$　…①　$4\alpha^3+2l\alpha+m=0$　…②

この2式から α を消去する。

①×4－②×α より，$2l\alpha^3+3m\alpha+4n=0$　…③

②×l－③×2α より，$-6m\alpha^2+(2l^2-8n)\alpha+lm=0$　…④

③×$3m$－④×l より，$(2l^3-8ln+9m^2)\alpha+l^2m+12mn=0$　…⑤

④×$(2l^3-8ln+9m^2)$＋⑤×$6m\alpha$ より，

$4l(l^4+6lm^2-8l^2n+16n^2)\alpha+lm(2l^3-8ln+9m^2)=0$

$\therefore l=0$，$4(l^4+6lm^2-8l^2n+16n^2)\alpha+m(2l^3-8ln+9m^2)=0$

[1]　$l=0$ のとき

①，②より，α を消去すると，$-27m^4+256n^3=0$　…⑥

[2]　$4(l^4+6lm^2-8l^2n+16n^2)\alpha+m(2l^3-8ln+9m^2)=0$ のとき，

$4(l^4+6lm^2-8l^2n+16n^2)\alpha+m(2l^3-8ln+9m^2)=0 \quad \cdots⑦$

⑤$\times\, 4(l^4+6lm^2-8l^2n+16n^2)-$⑦$\times\,(2l^3-8ln+9m^2)$ より，

$3m(16l^4n-4l^3m^2-128l^2n^2+144lm^2n-27m^4+256n^3)=0$

$\therefore\ m=0$， $16l^4n-4l^3m^2-128l^2n^2+144lm^2n-27m^4+256n^3=0$

[2−1]　$m=0$ のとき，

①，②より，α を消去すると， $l^2-4n=0 \quad \cdots⑧$

[2−2]　$16l^4n-4l^3m^2-128l^2n^2+144lm^2n-27m^4+256n^3=0$ のとき，

これは重解をもつ条件となる。

この式で， $l=0$ とおくと， $-27m^4+256n^3=0$ となり，⑥が得られる。

　　　　$m=0$ とおくと， $16n(l^2-4n)^2=0$ となり，⑧が得られる。

以上から，重解をもつ条件は， $16l^4n-4l^3m^2-128l^2n^2+144lm^2n-27m^4+256n^3=0$ 答

補足　式が長いので覚えづらいが， m について整理すると， $27m^4+4l(l^2-36n)m^2-16n(l^2-4n)^2=0$ となる。

(2021/8/8　ジョーカー)