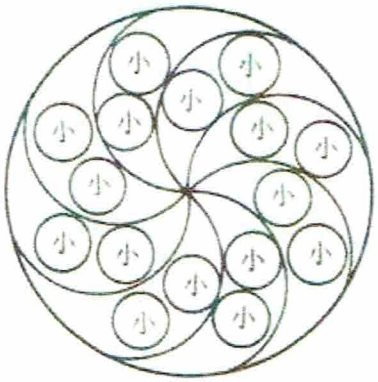
第 405 回

田代神社の算額（関流和算家谷幽斎先生遺弟・土屋武三郎信義奉納），弘化 2 年（1845）

第 1 問題

大円内に中心を通る等しい半円弧を作りそれらの間に 2 個の小円を書く。弧の個数は不明（例えば 8 個の弧で 5 個以下ではない）大円と小円の直径を知り円弧の数を求めよ。

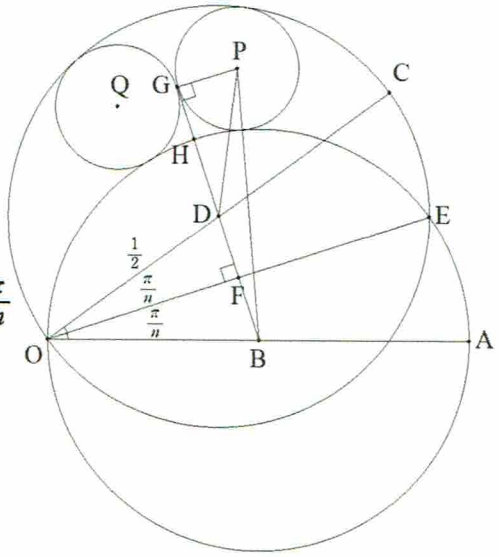


術文（答）

$$弧背数=\left[\frac{\pi(大円径)}{\sqrt{2}(小円径)}-3.3\right]$$

注　[ ]はガウスの記号

証明　大円をO(R)，半円弧の間の 2 円をP(r)，Q(r)とおき，図のように記号を付ける。



計算を簡単にするために，$R:r=1:\frac{r}{R}$ であるから，大円の半径を 1，

小円の半径を $r'=\frac{r}{R}$ とおく。

円弧の数を弧背数と解釈する。

弧背数が n（$n\geqq 6$）のとき，$\angle COA=\frac{2\pi}{n}$ であるから，$\angle DOF=\frac{\pi}{n}$

$OD=\frac{1}{2}$ より，$DF=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{n}$ であるから，$DB=2DF=\sin\frac{\pi}{n}$

△PGB について，$PG=r'$，$PB=r'+\frac{1}{2}$ であるから，

三平方の定理により，$GB=\sqrt{\left(r'+\frac{1}{2}\right)^2-r'^2}=\sqrt{r'+\frac{1}{4}}$

△PGD について，$GD=GB-DB=\sqrt{r'+\frac{1}{4}}-\sin\frac{\pi}{n}$，

$PD=\frac{1}{2}-r'$ であるから，

三平方の定理により，$\left(\sqrt{r'+\frac{1}{4}}-\sin\frac{\pi}{n}\right)^2+r'^2=\left(\frac{1}{2}-r'\right)^2$

整理すると，$2r'+\sin^2\frac{\pi}{n}=\sqrt{4r'+1}\sin\frac{\pi}{n}$

両辺を 2 乗して整理すると，$4r'^2+\sin^4\frac{\pi}{n}=\sin^2\frac{\pi}{n}$

$r'^2=\frac{1}{4}\sin^2\frac{\pi}{n}\left(1-\sin^2\frac{\pi}{n}\right)=\frac{1}{4}\sin^2\frac{\pi}{n}\cos^2\frac{\pi}{n}$

$r'>0$ より，$r'=\frac{r}{R}=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}=\frac{1}{4}\sin\frac{2\pi}{n}$　…①である。

①で $n=6, 7, \cdots, 15$ のときの $\frac{r}{R}$ の値を計算すると次の通り。（小数第 5 位四捨五入）

n	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\frac{r}{R}$	0.2165	0.1955	0.1768	0.1607	0.1469	0.1352	0.125	0.1162	0.1085	0.1017

…表①

$n \geqq 3$ のとき，$\left[\dfrac{\pi}{\sin\frac{\pi}{n}}\right] = n$ （定理＊）である。この式を参考にして，

[1] $\dfrac{2\pi}{\sin\frac{2\pi}{n}}$ について，$n=6,\ 7,\ \cdots,\ 30$ の値を計算してみると，

```
In[1]:= Table[N[2 π / Sin[2 π / n]], {n, 6, 30}]
```

```
Out[1]= {7.2552, 8.0365, 8.88577, 9.7749, 10.6896, 11.6217, 12.5664, 13.5203, 14.4813,
15.4478, 16.4188, 17.3933, 18.3708, 19.3508, 20.3328, 21.3166, 22.3019,
23.2886, 24.2764, 25.2651, 26.2548, 27.2452, 28.2364, 29.2281, 30.2205}
```

これらの値を四捨五入すると，7，8，9，10，11，…となり，6，7，8，9，10，…とならない。

[2] $\dfrac{2\pi}{\sin\frac{2\pi}{n}} - 1$ について，$n=6,\ 7,\ \cdots,\ 30$ の値を計算してみると，

```
In[2]:= Table[N[2 π / Sin[2 π / n] - 1], {n, 6, 30}]
```

```
Out[2]= {6.2552, 7.0365, 7.88577, 8.7749, 9.68959, 10.6217, 11.5664, 12.5203, 13.4813,
14.4478, 15.4188, 16.3933, 17.3708, 18.3508, 19.3328, 20.3166, 21.3019,
22.2886, 23.2764, 24.2651, 25.2548, 26.2452, 27.2364, 28.2281, 29.2205}
```

これらの値を四捨五入すると，6，7，8，9，10，11，12，13，13，…となり，$n=13$ まで一致する。

[3] $\dfrac{2\pi}{\sin\frac{2\pi}{n}} - 0.8$ について，$n=6,\ 7,\ \cdots,\ 30$ の値を計算してみると，

```
In[3]:= Table[N[2 π / Sin[2 π / n] - 0.8], {n, 6, 30}]
```

```
Out[3]= {6.4552, 7.2365, 8.08577, 8.9749, 9.88959, 10.8217, 11.7664, 12.7203, 13.6813,
14.6478, 15.6188, 16.5933, 17.5708, 18.5508, 19.5328, 20.5166, 21.5019,
22.4886, 23.4764, 24.4651, 25.4548, 26.4452, 27.4364, 28.4281, 29.4205}
```

これらの値を四捨五入すると，6，7，8，9，10，11，12，13，14，15，16，17，18，19，20，21，22，22…となり，$n=22$ まで一致する。

よって，x を四捨五入した値を $\langle x \rangle$ で表すと，$n=6,\ 7,\ \cdots,\ 22$ について，$\left\langle \dfrac{2\pi}{\sin\frac{2\pi}{n}} - 0.8 \right\rangle = n$ となる。

①より，$\sin\dfrac{2\pi}{n} = \dfrac{4r}{R}$ であるから，$n = \left\langle \dfrac{2\pi}{\frac{4r}{R}} - 0.8 \right\rangle = \left\langle \dfrac{\pi R}{2r} - 0.8 \right\rangle$

従って，弧背数$= \left\langle \dfrac{\pi(\text{大円径})}{2(\text{小円径})} - 0.8 \right\rangle$ 答

ただし，$\langle x \rangle$ は x を四捨五入した値を表し，弧背数 n が $n=6,\ 7,\ \cdots,\ 22$ まで正しく値を返すことができる。

補足　術文に 3.3 という小数第 1 位までの小数があるので，答にも小数第 1 位までの 0.8 を用いた。

なお，$n \geqq 23$ については現実的な問題として考える必要はないと思う。

$6 \leqq n \leqq 13$ の範囲で十分なら，弧背数 $= \left\langle \dfrac{\pi(\text{大円径})}{2(\text{小円径})} - 1 \right\rangle$ で値は返される。

※四捨五入を表す記号でなく，ガウス記号を用いた式については分からなかった。

【参考文献】

＊　幾何学大辞典　補巻Ⅰ（岩田至康編　槇書店　1988）p.349 に証明があるが，この定理をそのまま使用していない（参考にしただけ）なので証明は省略する。

注意　術文（答）は表①を満たさないので，術文はミスプリントである。

$\because$ 弧背数 $= \left[\dfrac{\pi(\text{大円径})}{\sqrt{2}(\text{小円径})} - 3.3 \right]$ について，弧背数を n（$n \geqq 6$），大円の半径を 1，小円の半径を r' とすると，

$n = \left[\dfrac{\pi \cdot 1}{\sqrt{2}\,r'} - 3.3 \right]$ より，$\dfrac{\pi}{\sqrt{2}\,r'} - 3.3 \leqq n < \dfrac{\pi}{\sqrt{2}\,r'} - 3.3 + 1$　$\therefore \dfrac{\pi}{\sqrt{2}(n+3.3)} \leqq r' < \dfrac{\pi}{\sqrt{2}(n+2.3)}$

$n=6,\ 7,\ 8,\ \cdots$ を代入して，小円の半径の値の範囲を求めてみる。

$n=6$ のとき，$0.238865 \leqq r' < 0.267644$

$n=7$ のとき，$0.215674 \leqq r' < 0.238865$　← 表①で $n=6$ のとき，$r'=0.2165$

$n=8$ のとき，$0.196588 \leqq r' < 0.215674$

$n=9$ のとき，$0.180605 \leqq r' < 0.196588$　← 表①で $n=7$ のとき，$r'=0.1955$

$n=10$ のとき，$0.167026 \leqq r' < 0.180605$　← 表①で $n=8$ のとき，$r'=0.1768$

$n=11$ のとき，$0.155346 \leqq r' < 0.167026$　← 表①で $n=9$ のとき，$r'=0.1607$

$n=12$ のとき，$0.145192 \leqq r' < 0.155346$

……

（2021/10/14　ジョーカー）

第 405 回　第 1 問題の術文（答）の検証

弧背数$=\left[\dfrac{\pi(\text{大円径})}{\sqrt{2}(\text{小円径})}-3.3\right]$について，弧背数を n （$n \geqq 6$），大円の半径を 1，小円の半径を r とすると，

$n=\left[\dfrac{\pi\cdot 1}{\sqrt{2}r}-3.3\right]$ より，$\dfrac{\pi}{\sqrt{2}r}-3.3 \leqq n < \dfrac{\pi}{\sqrt{2}r}-3.3+1$　$\therefore \dfrac{\pi}{\sqrt{2}(n+3.3)} \leqq r < \dfrac{\pi}{\sqrt{2}(n+2.3)}$

$n=6,\ 7,\ 8,\ \cdots$ を代入して，小円の半径の値の範囲を求める。ただし，小数の値は近似値である。

$n=6$ のとき，$0.238865 \leqq r < 0.267644$

$n=7$ のとき，$0.215674 \leqq r < 0.238865$　$\leftarrow c=0.216$　$n=6$

$n=8$ のとき，$0.196588 \leqq r < 0.215674$

$n=9$ のとき，$0.180605 \leqq r < 0.196588$　$\leftarrow c=0.195$　$n=7$

$n=10$ のとき，$0.167026 \leqq r < 0.180605$　$\leftarrow c=0.175$　$n=8$

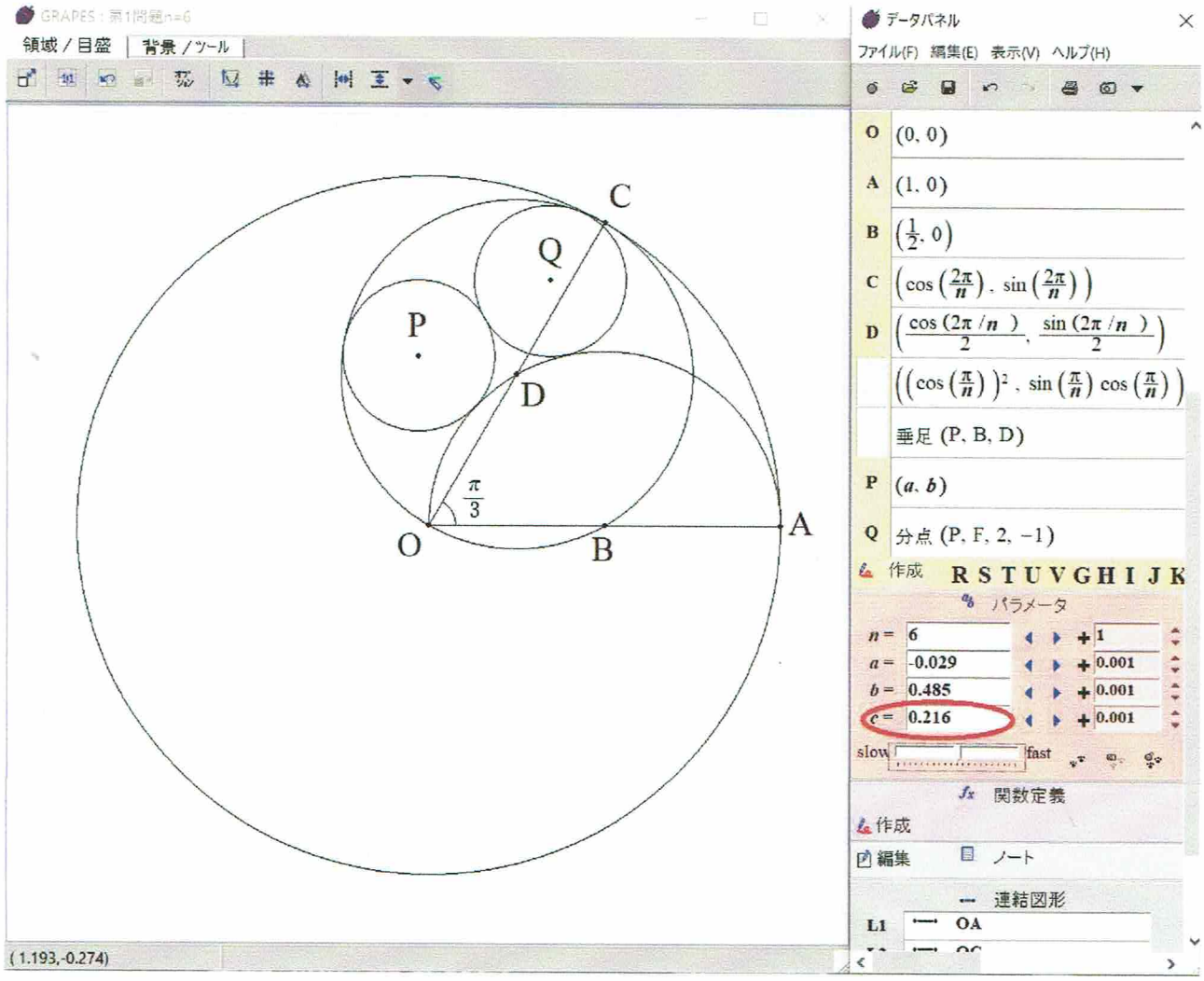
$n=11$ のとき，$0.155346 \leqq r < 0.167026$　$\leftarrow c=0.160$　$n=9$

$n=12$ のとき，$0.145192 \leqq r < 0.155346$

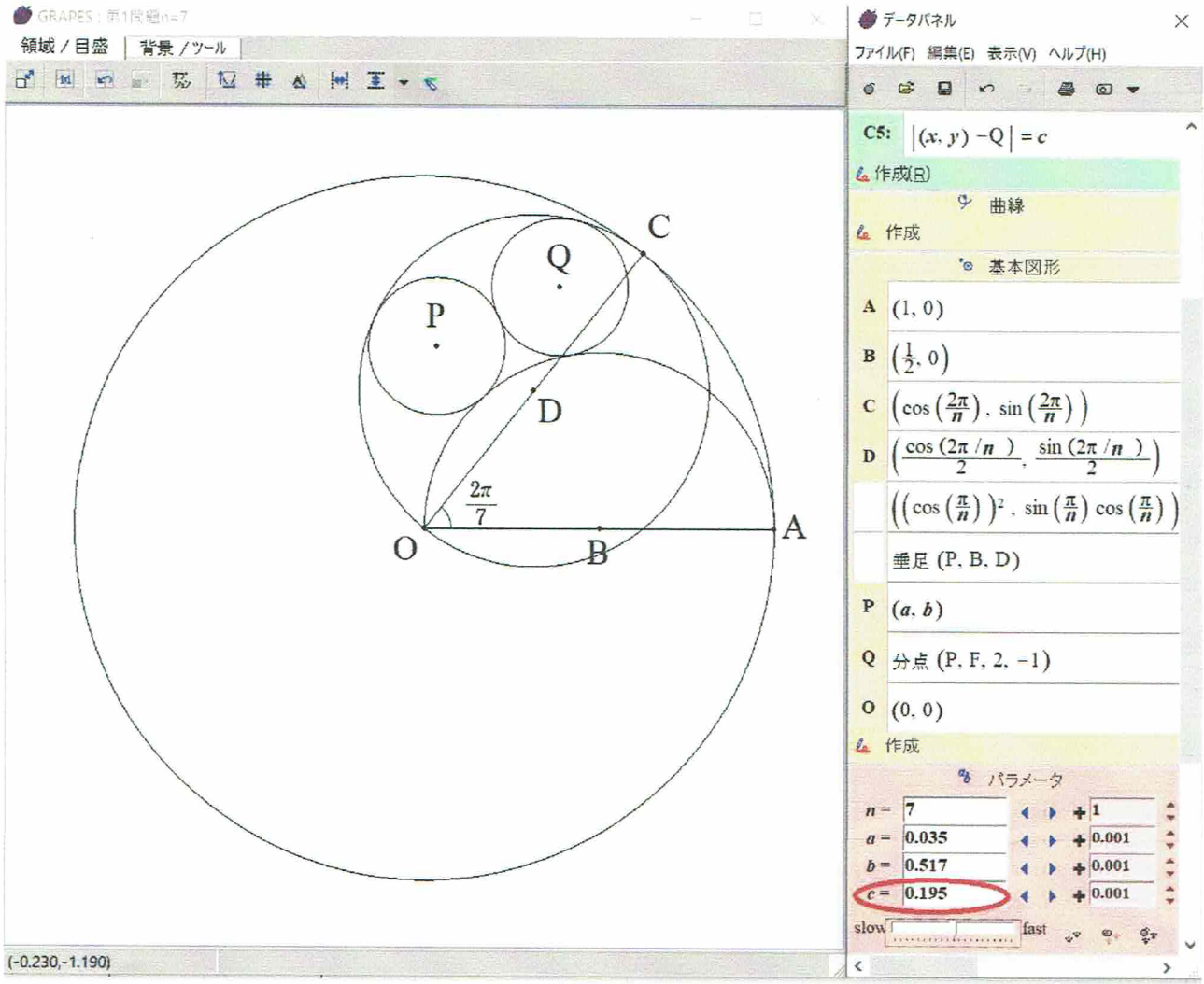
……

【検証】実際に $n=6,\ 7,\ 8,\ 9$ の場合について，図をGrapesを用いて描いてみる。図で c の値が小円の半径である。

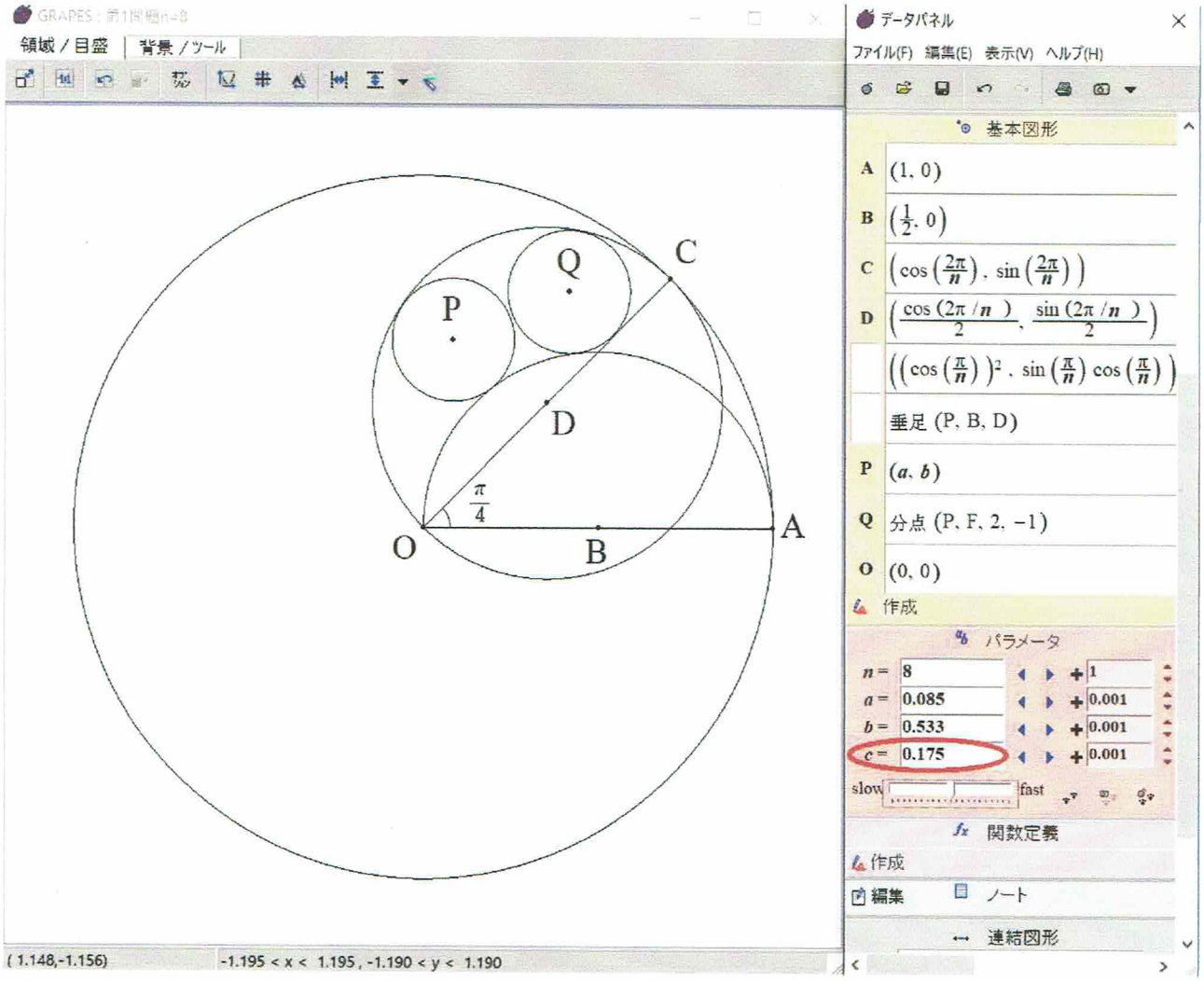
(1)　$n=6$ のとき，$c \fallingdotseq 0.216$



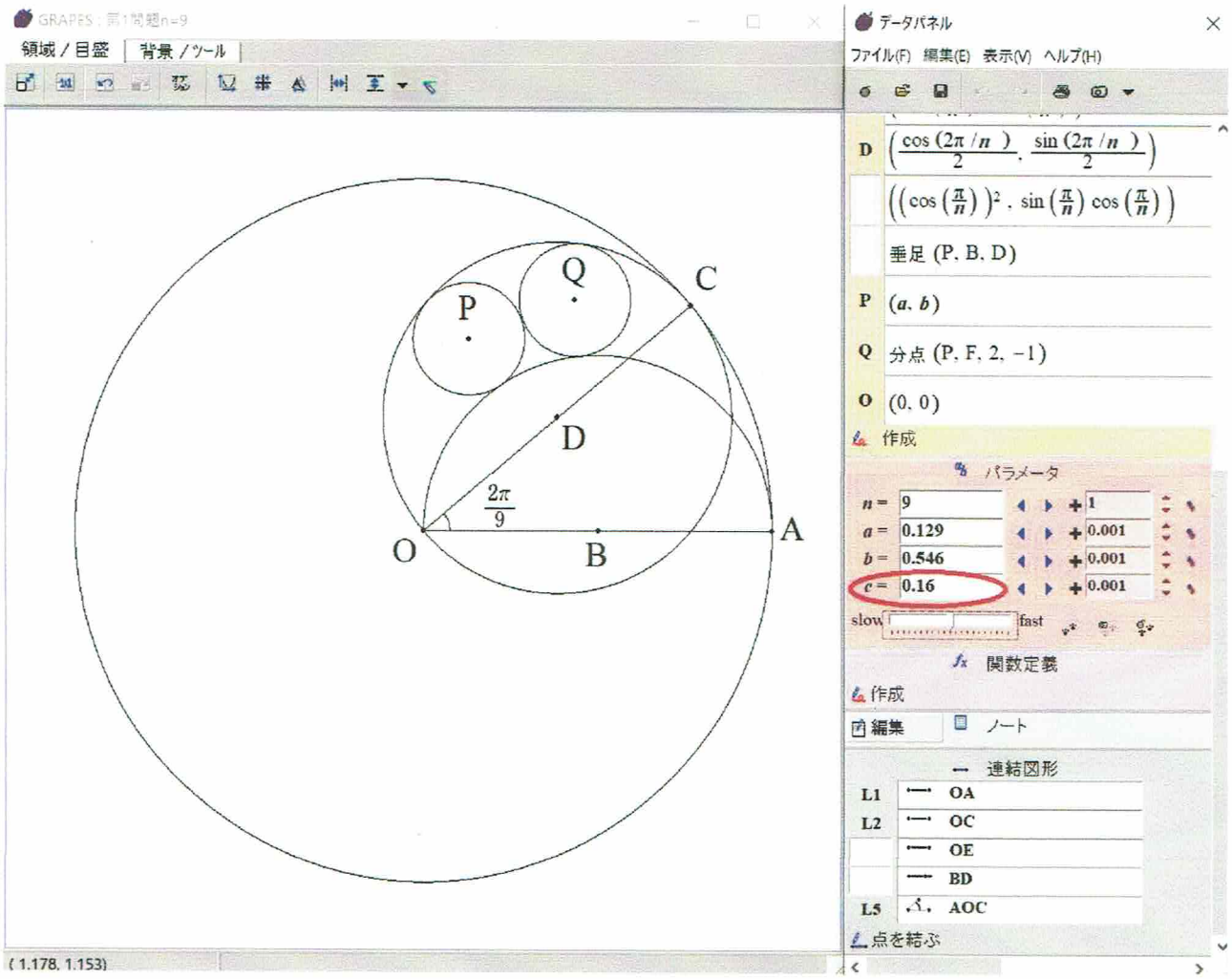
(2)　$n=7$ のとき，$c \fallingdotseq 0.195$



(3)　$n=8$ のとき，$c \fallingdotseq 0.175$



(3)　$n=9$ のとき，$c \fallingdotseq 0.160$



以上により，術文（答）は修正が必要である。

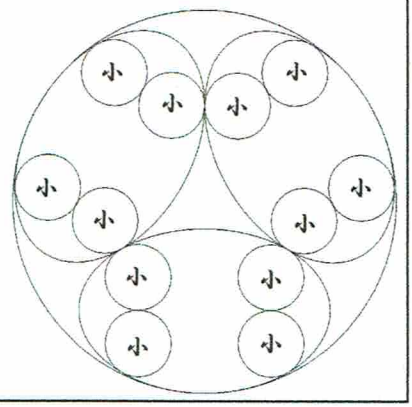
(2021/10/13　ジョーカー)

第 405 回

田代神社の算額（関流和算家谷幽斎先生遺弟・土屋武三郎信義奉納），弘化 2 年（1845）

第 2 問題

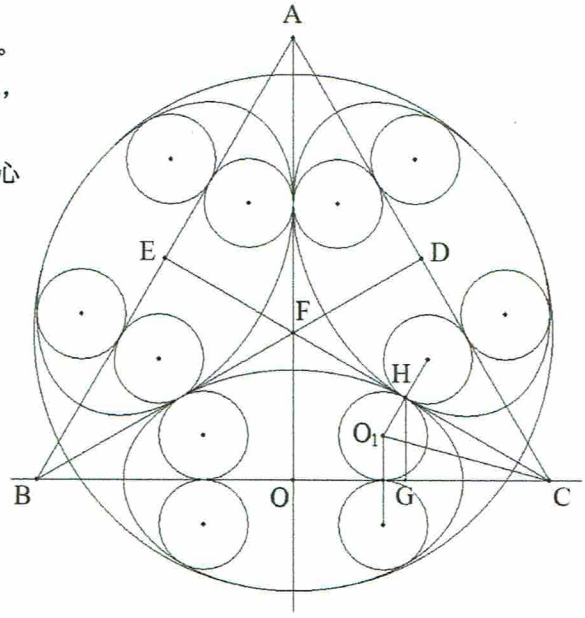
円に等楕円 3 個を入れる（楕円の短径の端で接する円は最小円）。
それらの楕円の中へ 12 個の小円を入れる。
外円の直径を知って小円の半径を求めよ。



術文（答）

$$小円径=\frac{9}{7}(1-\sqrt{0.75})\times(外円径)$$

証明　与えられた図を座標平面上において考える。



下側の楕円の中心を原点 O，長径を x 軸，短径を y 軸上におく。
3 個の楕円の長径の延長の交点を図のように A，B，C とすると，
題意より△ABC は正三角形となり，AO，BD，CE は角の
二等分線であるから F は内心となる。図に示す小円の一つの中心
を O_1 とする。

$\angle FCO=30^\circ$ であるから，$\angle O_1CH=15^\circ$ である。

次に中心が O である楕円の方程式を，$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$　…①

とおく。

$F(0,\ f)$ とおくと，$C(\sqrt{3}f,\ 0)$ であるから，

直線 FC の方程式は，$\dfrac{x}{\sqrt{3}f}+\dfrac{y}{f}=1$

$\therefore x=\sqrt{3}(f-y)$　…②

②を①に代入すると，$\dfrac{\{\sqrt{3}(f-y)\}^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

分母を払って整理すると，$(a^2+3b^2)y^2-6b^2fy+b^2(3f^2-a^2)=0$　…③

この y についての 2 次方程式の判別式を D とすると，接するから $D=0$ である。

$\dfrac{D}{4}=\{-3b^2f\}^2-(a^2+3b^2)\cdot b^2(3f^2-a^2)=a^2b^2(a^2+3b^2-3f^2)=0$ より，$f^2=\dfrac{a^2+3b^2}{3}$

$f>0$ より，$f=\sqrt{\dfrac{a^2+3b^2}{3}}$　$\therefore C(\sqrt{a^2+3b^2},\ 0)$

このとき，③より，$y=\dfrac{3b^2f}{a^2+3b^2}=\dfrac{\sqrt{3}b^2}{\sqrt{a^2+3b^2}}$

②より，$x=\dfrac{a^2}{\sqrt{a^2+3b^2}}$　$\therefore H\left(\dfrac{a^2}{\sqrt{a^2+3b^2}},\ \dfrac{\sqrt{3}b^2}{\sqrt{a^2+3b^2}}\right)$

$$CH=\sqrt{\left(\frac{a^2}{\sqrt{a^2+3b^2}}-\sqrt{a^2+3b^2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}b^2}{\sqrt{a^2+3b^2}}\right)^2}=\frac{2\sqrt{3}b^2}{\sqrt{a^2+3b^2}}$$

△O_1CH は直角三角形で，$\tan 15^\circ=\dfrac{\tan 60^\circ-\tan 45^\circ}{1+\tan 60^\circ\tan 45^\circ}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}\cdot 1}=2-\sqrt{3}$ あるから，

小円の半径 r は，$r=\mathrm{O_1H}=\mathrm{CH}\tan 15^\circ=\dfrac{2\sqrt{3}\,b^2}{\sqrt{a^2+3b^2}}\cdot(2-\sqrt{3})=\dfrac{2(2\sqrt{3}-3)b^2}{\sqrt{a^2+3b^2}}$ …④

外円の半径を R とおくと，曲率円であるから，$R=\dfrac{a^2}{b}$ …⑤

$R=f+b$ より，$\dfrac{a^2}{b}=\sqrt{\dfrac{a^2+3b^2}{3}}+b$ $\quad\therefore\left(\dfrac{a}{b}\right)^2=\dfrac{7}{3}$

④，⑤より，$\dfrac{2r}{2R}=\dfrac{r}{R}=\dfrac{\dfrac{2(2\sqrt{3}-3)b^2}{\sqrt{a^2+3b^2}}}{\dfrac{a^2}{b}}=\dfrac{2(2\sqrt{3}-3)b^3}{a^2\sqrt{a^2+3b^2}}=\dfrac{2(2\sqrt{3}-3)}{\left(\dfrac{a}{b}\right)^2\sqrt{\left(\dfrac{a}{b}\right)^2+3}}=\dfrac{2(2\sqrt{3}-3)}{\dfrac{7}{3}\sqrt{\dfrac{7}{3}+3}}=\dfrac{9(2-\sqrt{3})}{14}$

$=\dfrac{9}{7}(1-\sqrt{0.75})$ （≒ 0.172253）

よって，小円径 $=\dfrac{9}{7}(1-\sqrt{0.75})\times$(外円径) 答

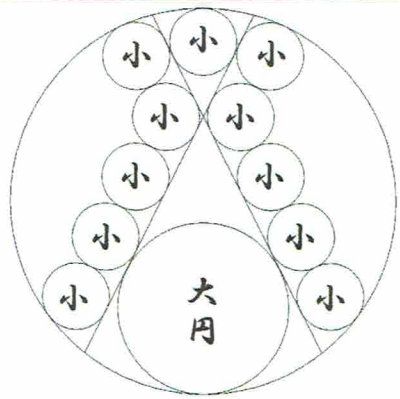
(2021/9/21　ジョーカー)

第 405 回

田代神社の算額（関流和算家谷幽斎先生遺弟・土屋武三郎信義奉納），弘化 2 年（1845）

第 3 問題

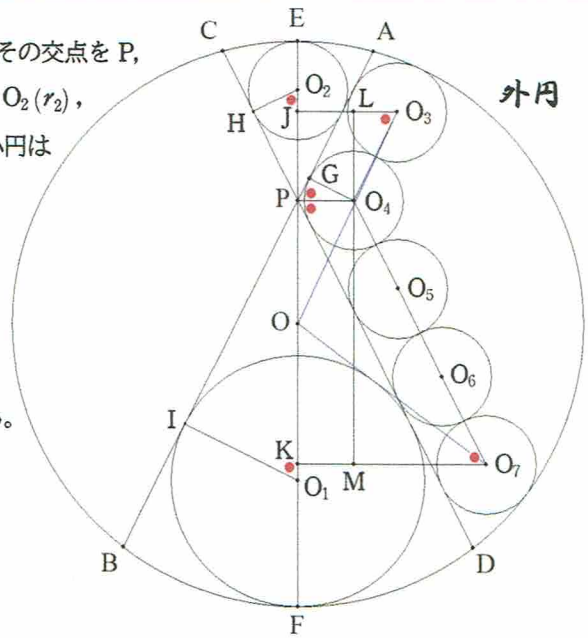
円に相交わる等しい 2 つの弦を引き，小円 11 個と
大円 1 個を入れる。
小円の直径を知って大円の直径を求めよ。



術文（答）

$$大円径=\frac{61-9\sqrt{5}}{16}\cdot(小円径)$$

証明



外円を $O(R)$，外円に相交わる等しい 2 つの弦を AB，CD，その交点を P，
∠APCを二等分する直径を EF とし，大円を $O_1(r_1)$，小円を $O_2(r_2)$，
$O_3(r_2)$，$O_4(r_2)$，$O_5(r_2)$，$O_6(r_2)$，$O_7(r_2)$ とおく。なお，小円は
EF に関して対称だから，右側の小円だけに記号を付ける。
O_4 から AB に下した垂線の足を G，
O_2 から CD に下した垂線の足を H，
O_1 からABにおろしら垂線の足をI，
O_3，O_7 から EF に下した垂線の足をそれぞれ J，K，
O_4 から JO_3，KO_7 に下した垂線の足をそれぞれ L，M とする。
また，$\angle APD=2\theta$ とおくと，$\angle APO_4=\angle DPO_4=\theta$
$O_3O_4 /\!/ AB$，$LO_3 /\!/ PO_4$ であるから，
$\angle APO_4=\angle O_4O_3L=\angle O_4O_7M=\theta$，
また，$\angle PO_2H=90°-\angle O_2PH=90°-\angle OPD=\angle DPO_4=\theta$
$\triangle PO_1I \backsim \triangle PO_2H$ より，$\angle PO_1I=\angle PO_2H=\theta$ である。

次に，$O_4G=O_2H=r_2$ であるから，$PO_4=\dfrac{r_2}{\sin\theta}$，$PO_2=\dfrac{r_2}{\cos\theta}$　また，$O_1I=r_1$ であるから，$PO_1=\dfrac{r_1}{\cos\theta}$

$EF=EO_2+O_2P+PO_1+O_1F=r_2+\dfrac{r_2}{\cos\theta}+\dfrac{r_1}{\cos\theta}+r_1=2R$ より，$R=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{\cos\theta}\right)(r_1+r_2)$　…①

$\triangle O_4O_3L$ について，$O_4O_3=2r_2$ であるから，$LO_3=2r_2\cos\theta$，$LO_4=2r_2\sin\theta$

$\triangle O_4O_7M$ について，$O_4O_7=6r_2$ であるから，$MO_7=6r_2\cos\theta$，$MO_4=6r_2\sin\theta$

$PO=EO-EO_2-O_2P=R-r_2-\dfrac{r_2}{\cos\theta}=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{\cos\theta}\right)(r_1+r_2)-r_2\left(1+\dfrac{1}{\cos\theta}\right)$　(∵①)

$=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{\cos\theta}\right)(r_1-r_2)$ であるから，

$\triangle OO_3J$ について，$JO_3=PO_4+LO_3=\dfrac{r_2}{\sin\theta}+2r_2\cos\theta$，$JO=LO_4+PO=2r_2\sin\theta+\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{\cos\theta}\right)(r_1-r_2)$

三平方の定理により，$OO_3{}^2=JO_3{}^2+JO^2=\left(\dfrac{r_2}{\sin\theta}+2r_2\cos\theta\right)^2+\left\{2r_2\sin\theta+\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{\cos\theta}\right)(r_1-r_2)\right\}^2$　…②

$\triangle OO_7K$ について，$KO_7=PO_4+MO_7=\dfrac{r_2}{\sin\theta}+6r_2\cos\theta$ ，$KO=MO_4-PO=6r_2\sin\theta-\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{\cos\theta}\right)(r_1-r_2)$

三平方の定理により，$OO_7{}^2=KO_7{}^2+KO^2=\left(\dfrac{r_2}{\sin\theta}+6r_2\cos\theta\right)^2+\left\{6r_2\sin\theta-\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{\cos\theta}\right)(r_1-r_2)\right\}^2$ …③

$OO_7=OO_3$であるから，②，③より，

$$\left(\frac{r_2}{\sin\theta}+6r_2\cos\theta\right)^2+\left\{6r_2\sin\theta-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\cos\theta}\right)(r_1-r_2)\right\}^2$$

$$=\left(\frac{r_2}{\sin\theta}+2r_2\cos\theta\right)^2+\left\{2r_2\sin\theta+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\cos\theta}\right)(r_1-r_2)\right\}^2$$

$$\left(\frac{2r_2}{\sin\theta}+8r_2\cos\theta\right)\cdot 4r_2\cos\theta+8r_2\sin\theta\left\{4r_2\sin\theta-\left(1+\frac{1}{\cos\theta}\right)(r_1-r_2)\right\}=0$$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ に注意して整理すると，$\dfrac{r_1}{r_2}=\dfrac{1+4\sin\theta\cos\theta+\sin^2\theta\cos\theta}{\sin^2\theta(1+\cos\theta)}$ …④

$OO_2=R-r_2=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{\cos\theta}\right)(r_1+r_2)-r_2$ （∵①）で，$OO_3=OO_2$ であるから，

$$\left(\frac{r_2}{\sin\theta}+2r_2\cos\theta\right)^2+\left\{2r_2\sin\theta+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\cos\theta}\right)(r_1-r_2)\right\}^2=\left\{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\cos\theta}\right)(r_1+r_2)-r_2\right\}^2$$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ に注意して整理すると，

$$\frac{r_1}{r_2}=\cos\theta\cdot\frac{\cos\theta+4\sin\theta\cos^2\theta+\sin^2\theta+4\sin^2\theta\cos\theta-2\sin^3\theta-2\sin^3\theta\cos\theta}{\sin^2\theta(1+\cos\theta)(1-2\sin\theta\cos\theta)}$$ …⑤

④，⑤より，

$$\frac{1+4\sin\theta\cos\theta+\sin^2\theta\cos\theta}{\sin^2\theta(1+\cos\theta)}$$

$$=\cos\theta\cdot\frac{\cos\theta+4\sin\theta\cos^2\theta+\sin^2\theta+4\sin^2\theta\cos\theta-2\sin^3\theta-2\sin^3\theta\cos\theta}{\sin^2\theta(1+\cos\theta)(1-2\sin\theta\cos\theta)}$$

両辺に $\sin^2\theta\cos\theta(1-2\sin\theta\cos\theta)$ を掛けると，

$$(1-2\sin\theta\cos\theta)(1+4\sin\theta\cos\theta+\sin^2\theta\cos\theta)$$

$$=\cos\theta(\cos\theta+4\sin\theta\cos^2\theta+\sin^2\theta+4\sin^2\theta\cos\theta-2\sin^3\theta-2\sin^3\theta\cos\theta)$$

展開して整理すると，

$$-1+\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+4\sin\theta\cos^3\theta+12\sin^2\theta\cos^2\theta-2\sin^3\theta\cos\theta=0$$

$-1+\cos^2\theta=-\sin^2\theta$ であるから，

$$-\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+4\sin\theta\cos^3\theta+12\sin^2\theta\cos^2\theta-2\sin^3\theta\cos\theta=0$$

両辺を $\sin\theta$ で割ると，$-\sin\theta-2\cos\theta+4\cos^3\theta+12\sin\theta\cos^2\theta-2\sin^2\theta\cos\theta=0$

$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$ を代入すると，$-\sin\theta-2\cos\theta+4\cos^3\theta+12\sin\theta\cos^2\theta-2(1-\cos^2\theta)\cos\theta=0$

$\sin\theta$ について解くと，$\sin\theta=\dfrac{4\cos\theta-6\cos^3\theta}{12\cos^2\theta-1}$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ より，$\left(\dfrac{4\cos\theta-6\cos^3\theta}{12\cos^2\theta-1}\right)^2+\cos^2\theta=1$

分母を払って整理すると，$(-1+5\cos^2\theta)(1-36\cos^2\theta+36\cos^4\theta)=0$ $\therefore\cos^2\theta=\dfrac{1}{5},\ \dfrac{3\pm2\sqrt{2}}{6}$

題意に適するのは，$\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ このとき，$\sin\theta=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

これらを④に代入すると，$\dfrac{r_1}{r_2}=\dfrac{1+4\cdot\dfrac{2}{\sqrt{5}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{5}}+\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)^2\cdot\dfrac{1}{\sqrt{5}}}{\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)^2\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)}=\dfrac{13\sqrt{5}+4}{4(\sqrt{5}+1)}=\dfrac{61-9\sqrt{5}}{16}$

よって，大円径$=\dfrac{61-9\sqrt{5}}{16}\cdot$(小円径)

補足 ①より，$R=\dfrac{8+17\sqrt{5}}{8}r_2$

(2021/10/10　ジョーカー)