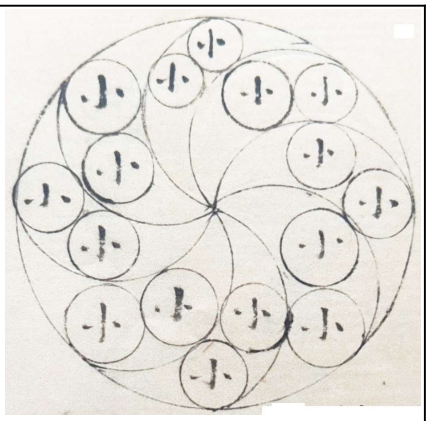
第405回　田代神社の算額，弘化２年（1845）

第１問題

大円内に中心を通る等しい半円弧を作りそれらの間に２個の小円を書く。弧の個数は不明（例えば８個の弧で５個以下ではない）大円と小円の直径を知り円弧の数を求めよ。

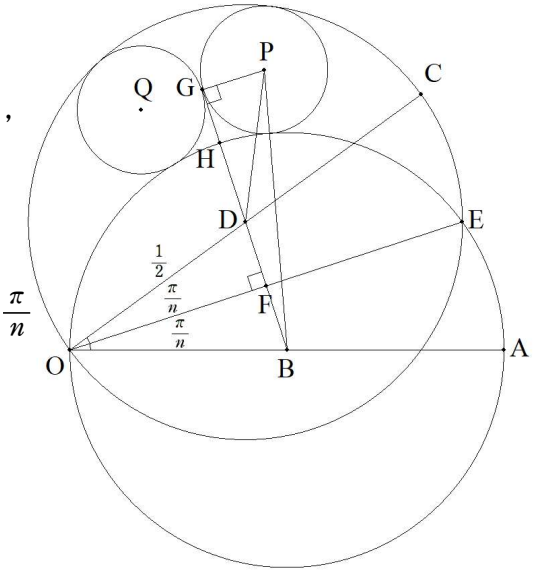


術文（答）

$$\text{弧背数}=\left[\frac{\pi(\text{大円径})}{\sqrt{2}(\text{小円径})}-3.3\right]$$

注　[ ]はガウスの記号

証明　大円をO(R)，半円弧の間の２円をP(r)，Q(r)とおき，図のように記号を付ける。



計算を簡単にするために，$R:r=1:\dfrac{r}{R}$ であるから，大円の半径を１，

小円の半径を $r'=\dfrac{r}{R}$ とおく。

円弧の数を弧背数と解釈する。

弧背数が n（$n\geqq 6$）のとき，$\angle\mathrm{COA}=\dfrac{2\pi}{n}$ であるから，$\angle\mathrm{DOF}=\dfrac{\pi}{n}$

$\mathrm{OD}=\dfrac{1}{2}$ より，$\mathrm{DF}=\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{\pi}{n}$ であるから，$\mathrm{DB}=2\,\mathrm{DF}=\sin\dfrac{\pi}{n}$

△PGB について，$\mathrm{PG}=r'$，$\mathrm{PB}=r'+\dfrac{1}{2}$ であるから，

三平方の定理により，$\mathrm{GB}=\sqrt{\left(r'+\dfrac{1}{2}\right)^2-r'^2}=\sqrt{r'+\dfrac{1}{4}}$

△PGD について，$\mathrm{GD}=\mathrm{GB}-\mathrm{DB}=\sqrt{r'+\dfrac{1}{4}}-\sin\dfrac{\pi}{n}$，

$\mathrm{PD}=\dfrac{1}{2}-r'$ であるから，

三平方の定理により，$\left(\sqrt{r'+\dfrac{1}{4}}-\sin\dfrac{\pi}{n}\right)^2+r'^2=\left(\dfrac{1}{2}-r'\right)^2$

整理すると，$2r'+\sin^2\dfrac{\pi}{n}=\sqrt{4r'+1}\sin\dfrac{\pi}{n}$

両辺を２乗して整理すると，$4r'^2+\sin^4\dfrac{\pi}{n}=\sin^2\dfrac{\pi}{n}$

$r'^2=\dfrac{1}{4}\sin^2\dfrac{\pi}{n}\left(1-\sin^2\dfrac{\pi}{n}\right)=\dfrac{1}{4}\sin^2\dfrac{\pi}{n}\cos^2\dfrac{\pi}{n}$

$r'>0$ より，$r'=\dfrac{r}{R}=\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{\pi}{n}\cos\dfrac{\pi}{n}=\dfrac{1}{4}\sin\dfrac{2\pi}{n}$　　$\therefore\dfrac{R}{r}=\dfrac{4}{\sin\dfrac{2\pi}{n}}$　　…①である。

$|x|<\pi$ のとき，$\dfrac{1}{\sin x}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{x}{3!}+\dfrac{7x^3}{3\cdot 5!}+\dfrac{31x^5}{3\cdot 7!}+\cdots+\dfrac{2(2^{2n+1}-1)}{(2n+2)!}B_{2n+1}x^{2n+1}+\cdots$ である。（＊1）　…②

$n \geqq 6$ のとき，$x=\dfrac{2\pi}{n} \leqq \dfrac{2\pi}{6}=\dfrac{\pi}{3}$ より，$\dfrac{x}{3!} \leqq \dfrac{\pi}{18}=0.17\cdots$ より，ガウス記号をとるから，②の第 2 項以降を省略すると，$\dfrac{1}{\sin x} \fallingdotseq \dfrac{1}{x}$ より，$\dfrac{1}{\sin\dfrac{2\pi}{n}} \fallingdotseq \dfrac{n}{2\pi}$

①は，$\dfrac{R}{r} \fallingdotseq 4\cdot\dfrac{n}{2\pi}$　$\therefore n \fallingdotseq \dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{R}{r}=\dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{4}{\sin\dfrac{2\pi}{n}}$　…①′

x を超えない最大の整数を $[x]$（ガウス記号）で 表す。

①′で $n=6,\ 7,\cdots,25$ のときの $\left[\dfrac{\pi\cdot 2R}{2\cdot 2r}\right]$　…③の値を計算すると次の通り。

```
In[1]:= Table[IntegerPart[π/2 4/Sin[2π/n]], {n, 6, 25}]
        リスト…  整数部分

Out[1]= {7, 8, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25}
```

$n=6,\ 7$ を除いて，正しい弧の個数を返している。（＊2）

よって，与えられた図のように，$n \geqq 8$ のときは，③で弧背数が返される。∴弧背数$=\left[\dfrac{\pi(\text{大円径})}{2(\text{小円径})}\right]$　答

（＊1）【参考文献】パース・フォスター簡約積分表（ブレイン図書出版株式会社　1972年）p.101

（＊2）$n \geqq 8$ のとき，$\left[\dfrac{2\pi}{\sin\dfrac{2\pi}{n}}\right]=n$ の証明

証明　②の式で，$\dfrac{1}{\sin x}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{x}{3!}+\dfrac{7x^3}{3\cdot 5!}+\dfrac{31x^5}{3\cdot 7!}+\cdots+\dfrac{2(2^{2n+1}-1)}{(2n+2)!}B_{2n+1}x^{2n+1}+\cdots$

$n \geqq 8$ のとき，$x=\dfrac{2\pi}{n} \leqq \dfrac{\pi}{4}$ より，$\dfrac{x}{3!} \leqq \dfrac{\frac{\pi}{4}}{3!}=\dfrac{\pi}{24}=0.130\cdots$，$\dfrac{7x^3}{3\cdot 5!} \leqq \dfrac{7\left(\frac{\pi}{4}\right)^3}{3\cdot 5!}=\dfrac{7\pi^3}{23040}=0.0094\cdots$

ガウス記号をとるとき，第 3 項以降は省略できるから，$\dfrac{1}{\sin\dfrac{2\pi}{n}} \fallingdotseq \dfrac{n}{2\pi}+\dfrac{2\pi}{3!n}$　$\therefore \dfrac{2\pi}{\sin\dfrac{2\pi}{n}} \fallingdotseq n+\dfrac{4\pi^2}{3!n}$

ガウス記号をとると，$\left[\dfrac{2\pi}{\sin\dfrac{2\pi}{n}}\right]=\left[n+\dfrac{4\pi^2}{3!n}\right]=n+\left[\dfrac{2\pi^2}{3n}\right]$

ここで，$n \geqq 8$ であるから，$0<\dfrac{2\pi^2}{3n} \leqq \dfrac{2\pi^2}{3\cdot 8}=\dfrac{\pi^2}{12}<1$ より，$\left[\dfrac{2\pi^2}{3n}\right]=0$

よって，$\left[\dfrac{2\pi}{\sin\dfrac{2\pi}{n}}\right]=n$　終

注意　術文の式で $n=6,\ 7,\cdots,25$ のときの $\left[\dfrac{\pi\cdot 2R}{\sqrt{2}\cdot 2r}-3.3\right]$ の値を計算すると次の通り。

```
In[2]:= Table[IntegerPart[π/√2 4/Sin[2π/n] - 3.3], {n, 6, 25}]
        リスト…  整数部分

Out[2]= {6, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 21, 22, 24, 25, 26, 28, 29, 31, 32}
```

$n=6$ を除いて，正しい答えを返していない。術文は印刷ミスだと思われる。

（蛇足）「岐阜県の算額の解説」（高木重治著）にある解答について

高木氏の解答では，$\dfrac{1}{\sin x}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{x}{3!}+\dfrac{7x^3}{3\cdot 5!}+\dfrac{31x^5}{3\cdot 7!}+\cdots+\dfrac{2(2^{2n+1}-1)}{(2n+2)!}B_{2n+1}x^{2n+1}+\cdots$ （$|x|<\pi$）の級数展開を利用すべきところを，$Arc\sin x=x+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\dfrac{x^5}{5}+\dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\dfrac{x^7}{7}+\cdots$ （$|x|<1$）の級数展開を利用しているので適さない。

（2022/11/19　ジョーカー）