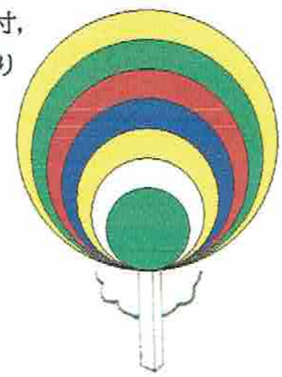
第 407 回

岐阜県大垣市外野釜笛　八幡宮　奉納算額　慶応元年（1865 年）

第 1 問題

団扇があり，糸で累円を作る（糸長は不明である）。初円径を知り，追次の円径（初円一寸，次円二寸，其次円四寸，其次円八寸，…）は円周率 32 で計り，糸長とし，円周率 30 で計り糸余を得た。団扇の直径を求めよ。



改題

団扇があり，糸で累円を作る。糸長と初円径を知り，団扇の直径を求めよ。ただし，追次の円径は，初円一寸，次円二寸，其次円四寸，其次円八寸，…とする。また，円周率は π とする。

術文（答）　団扇径$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\text{糸長}}{32-30}+\text{初円径}\right)$

解答　問題文を「糸を円周率 3.2 で用意したら余り，円周率 3 としたら足りなかった。」と解釈し，円周率は π を用いて解答する。

初円径(r)，団扇円径(R)，糸長を l とする。l と r を知って R を求める。$R=2^6r$ である。

円周率を π とすると，団扇の総周の長さは，

$l=(r+2r+2^2r+2^3r+2^4r+2^5r+2^6r)\pi=(2^7-1)\pi r=2^7\pi r-\pi r=2\pi R-\pi r$

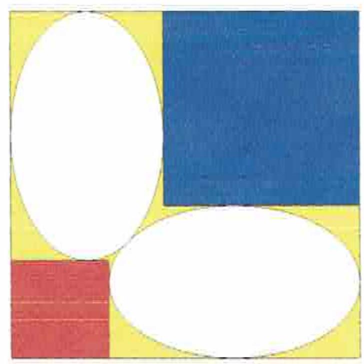
R について解くと，$R=\dfrac{l+\pi r}{2\pi}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{l}{\pi}+r\right)$　よって，団扇径$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\text{糸長}}{\pi}+\text{初円径}\right)$（寸）　答

第 2 問題

正方形の内へ青，赤 2 個の正方形を青は右上に，赤は左下に接するように入れる。

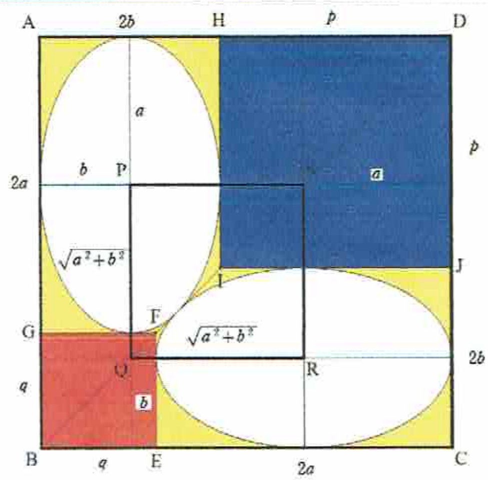
その隙間に 2 個の等楕円を正方形に接するように入れる。

青と赤の一辺を知って楕円の面積を求めよ。



術文（答）　楕円の面積$=2\cdot$青$\cdot$赤$\cdot\dfrac{\pi}{4}$

解答　楕円の長軸，短軸をそれぞれ $2a$，$2b$ とし，正方形青，赤の一辺をそれぞれ p，q とし，図のように記号を付ける。



公式（第 404 回追加問題 1）により，SQ は楕円の接線で，

$\angle SQR=45^\circ$ であるから，

$SR=\sqrt{a^2\tan^2 45^\circ+b^2}=\sqrt{a^2+b^2}$ となる。

図より，正方形の一辺 $AD=AB=b+PS+a$ より，

$2b+p=2a+q=b+\sqrt{a^2+b^2}+a$ であるから，

$p=\sqrt{a^2+b^2}+a-b$　…①，　$q=\sqrt{a^2+b^2}-(a-b)$　…②

①，②より，$pq=a^2+b^2-(a-b)^2=2ab$　…③

楕円の面積 S は，$S=\pi ab$ であるから，③より，

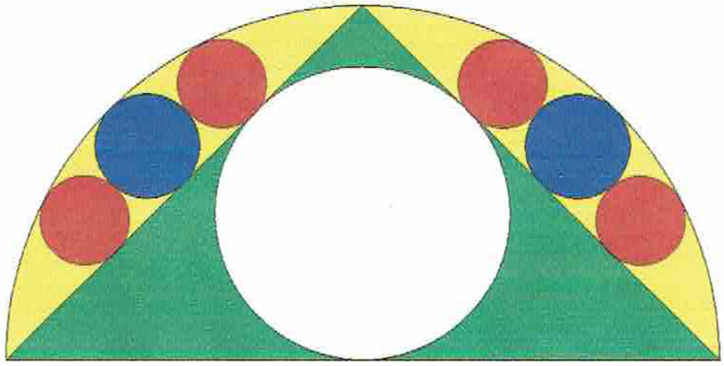
$S=\pi\cdot\dfrac{pq}{2}=2\cdot$青$\cdot$赤$\cdot\dfrac{\pi}{4}$　答

補足　①−②より，$p-q=2a-2b$ となるから，青１辺−赤１辺＝長軸−短軸となる。

第３問題

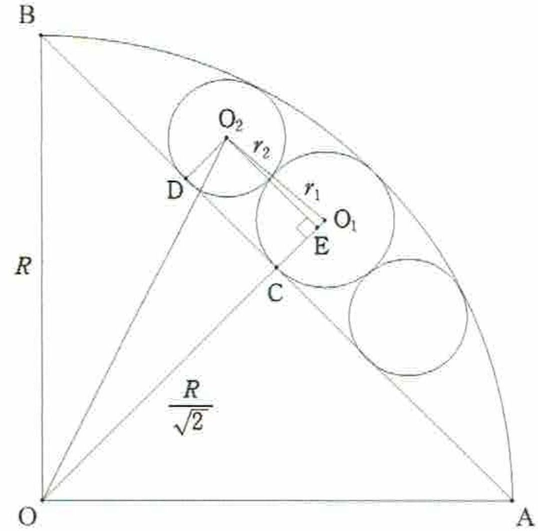
半円内に直角二等辺三角形をつくり，その隙間に青，赤の６個の円を入れる（各円は互いに外接して三角形の辺と半円周に接する）。半円の直径を知って赤円径を求めよ。

術文（答）　赤円径＝半円径÷８



解答　図形は左右対称であるから，右半分で考える。

半円Ｏの直径を $2R$，図に示す青円，赤円を $O_1(r_1)$，$O_2(r_2)$ とする。



△OCBにおいて，∠OCB=90°，∠BOC=45° であるから，

$\mathrm{OC}=\dfrac{R}{\sqrt{2}}=R-2r_1$ より，$\therefore r_1=\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}R$　…①

次に，$\triangle \mathrm{O_1O_2E}$ に三平方の定理を適用して，

$\mathrm{O_2E}=\sqrt{(r_1+r_2)^2-(r_1-r_2)^2}=2\sqrt{r_1r_2}$

また，$\mathrm{OO_2}=R-r_2$，$\mathrm{OE}=\dfrac{R}{\sqrt{2}}+r_2$ であるから，

$\triangle \mathrm{O_2OE}$ に三平方の定理を適用して，

$$(R-r_2)^2=\left(\frac{R}{\sqrt{2}}+r_2\right)^2+(2\sqrt{r_1r_2})^2$$

展開して，r_2 について解くと，$r_2=\dfrac{R^2}{2\{(2+\sqrt{2})R+4r_1\}}$

①を代入すると，$r_2=\dfrac{R^2}{2\left\{(2+\sqrt{2})R+4\cdot\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}R\right\}}=\dfrac{R}{8}$　$\therefore 2r_2=\dfrac{2R}{8}$ であるから，

よって，赤円径＝半円径÷８　答

補足　白円の半径 r について

白円は直角二等辺三角形の内接円である。$\mathrm{AB}=\sqrt{2}R$ より，$r=\dfrac{\sqrt{2}R+\sqrt{2}R-2R}{2}=(\sqrt{2}-1)R$

また，青円の半径 $r_1=\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}R=\dfrac{(\sqrt{2}-1)R}{2\sqrt{2}}=\dfrac{(\text{白円の半径})}{2\sqrt{2}}$

(2021/11/14　ジョーカー)