第 407 回追加問題

1. 5数 a, b, c, d, e について,

$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}+\frac{1}{e^2}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}=a+b+c+d+e=a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=1$ のとき,

a, b, c, d, e の中に1があることを示せ。

証明 $(a-1)(b-1)(c-1)(d-1)(e-1)=0$ を示す。

左辺$=abcde-(abcd+abce+abde+acde+bcde)+(abc+abd+abe+acd+ace+ade+bcd+bce+bde+cde)-(ab+ac+ad+ae+bc+bd+be+cd+ce+de)+(a+b+c+d+e)-1$

$$=abcde\left\{1-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}\right)\right\}+\frac{1}{2}abcde\left\{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}\right)^2-\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}+\frac{1}{e^2}\right)\right\}+$$

$$\frac{1}{2}\{(a+b+c+d+e)^2-(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2)\}=0=\text{右辺}$$

よって, a, b, c, d, e のうちどれかは1である。 終

別解 $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)(x-e)=x^5+px^4+qx^3+rx^2+sx+t$ とおくと, 解と係数の関係により,

$p=-(a+b+c+d+e)=-1$

$q=ab+ac+ad+ae+bc+bd+be+cd+ce+de=\frac{1}{2}\{(a+b+c+d+e)^2-(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2)\}$

$$=\frac{1}{2}(1^2-1)=0$$

$r=-(abc+abd+abe+acd+ace+ade+bcd+bce+cde)$

$$=-abcde\left\{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}\right)^2-\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}+\frac{1}{e^2}\right)\right\}=\frac{1}{2}(1^2-1)=0$$

$s=abcd+abce+abde+acde+bcde=abcde\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}\right)=abcde=t$

よって, $f(x)=x^4-x^3-tx+t$ となり, $f(1)=0$ となるから, a, b, c, d, e のうちどれかは1である。 終

2. 数列 $\{a_n\}$ の一般項が $a_n=\alpha^n+\beta^n+\gamma^n+\delta^n+\varepsilon^n$ と表され, $a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=3$, $a_4=4$, $a_5=5$ のとき, a_6 の値を求めよ。

解答 $f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)(x-\varepsilon)=x^5-px^4+qx^3-rx^2+sx-t$ とおくと,

$f'(x)=5x^4-4px^3+3qx^2-2rx+s$ であるから, $\frac{xf'(x)}{f(x)}=\frac{5x^5-4px^4+3qx^3-2rx^2+sx}{x^5-px^4+qx^3-rx^2+sx-t}$

普通に割り算を実行すると,

$$\begin{array}{r|l}
 & 5,\ p,\ p^2-2q, \\ \hline
1,\ -p,\ q,\ -r,\ s,\ -t & 5,\ -4p,\ 3q,\ -2r,\ s,\ 0 \\
 & 5,\ -5p,\ 5q,\ -5r,\ 5s,\ -5t \\ \hline
 & \quad p,\ -2q,\ 3r,\ -4s,\ 5t \\
 & \quad p,\ -p^2,\ pq,\ -pr,\ ps,\ -pt \\ \hline
 & \quad p^2-2q,\ -pq+3r,\ pr-4s,\ -ps+5t,\ pt \\
 & \quad p^2-2q,\ -p^3+2pq,\ p^2q-2q^2,\ \cdots \ \text{(以下省略)}
\end{array}$$

$$\frac{xf'(x)}{f(x)}=5+\frac{p}{x}+\frac{p^2-2q}{x^2}+\frac{p^3-3pq+3r}{x^3}+\frac{p^4-4p^2q+2q^2+4pr-4s}{x^4}$$

$$+\frac{p^5-5p^3q+5pq^2+5p^2r-5qr-5ps+5t}{x^5}$$

$$+\frac{p^6-6p^4q+9p^2q^2-2q^3+6p^3r-12pqr+3r^2-6p^2s+6qs+6pt}{x^6}+\cdots$$

$=5+\dfrac{a_1}{x}+\dfrac{a_2}{x^2}+\dfrac{a_3}{x^3}+\dfrac{a_4}{x^4}+\dfrac{a_5}{x^5}+\dfrac{a_6}{x^6}+\cdots$ （⟹次の 3(2) 参照）

$=5+\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{3}{x^3}+\dfrac{4}{x^4}+\dfrac{5}{x^5}+\dfrac{a_6}{x^6}+\cdots$ であるから，係数を比較して，

$p=1$， $p^2-2q=2$， $p^3-3pq+3r=3$， $p^4-4p^2q+2q^2+4pr-4s=4$， $p^5-5p^3q+5pq^2+5p^2r-5qr-5ps+5t=5$ より， $p=1$， $q=-\dfrac{1}{2}$， $r=\dfrac{1}{6}$， $s=\dfrac{1}{24}$， $t=-\dfrac{19}{120}$

このとき， $a_6=p^6-6p^4q+9p^2q^2-2q^3+6p^3r-12pqr+3r^2-6p^2s+6qs+6pt=\dfrac{871}{120}$ 答

別解 $f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)(x-\varepsilon)=x^5-px^4+qx^3-rx^2+sx-t=0$ とおく。

α は $f(x)=0$ の解であるから，$\alpha^5-p\alpha^4+q\alpha^3-r\alpha^2+s\alpha-t=0$

両辺に α^n を掛けると， $\alpha^{n+5}-p\alpha^{n+4}+q\alpha^{n+3}-r\alpha^{n+2}+s\alpha^{n+1}-t\alpha^n=0$

β，…，ε についても同様に，

$\beta^{n+5}-p\beta^{n+4}+q\beta^{n+3}-r\beta^{n+2}+s\beta^{n+1}-t\beta^n=0$，…， $\varepsilon^{n+5}-p\varepsilon^{n+4}+q\varepsilon^{n+3}-r\varepsilon^{n+2}+s\varepsilon^{n+1}-t\varepsilon^n=0$

これら５式を辺々加えると， $a_n=\alpha^n+\beta^n+\gamma^n+\delta^n+\varepsilon^n$ であるから，

$a_{n+5}-pa_{n+4}+qa_{n+3}-ra_{n+2}+sa_{n+1}-ta_n=0$ …①

次に，５文字の対称式をΣを用いて表すと，解と係数の関係により，

$p=\Sigma\alpha=1$， $q=\Sigma\alpha\beta=\dfrac{1}{2}\{(\Sigma\alpha)^2-\Sigma\alpha^2\}=\dfrac{1}{2}(1^2-2)=-\dfrac{1}{2}$， $r=\Sigma\alpha\beta\gamma$， $s=\Sigma\alpha\beta\gamma\delta$， $t=\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ である。

ここで，$\Sigma\alpha^3-3\Sigma\alpha\beta\gamma=\Sigma\alpha(\Sigma\alpha^2-\Sigma\alpha\beta)$ であるから (*)，

$r=\Sigma\alpha\beta\gamma=\dfrac{1}{3}\{\Sigma\alpha^3-\Sigma\alpha(\Sigma\alpha^2-\Sigma\alpha\beta)\}=\dfrac{1}{3}\left[3-1\left\{2-\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right\}\right]=\dfrac{1}{6}$ となる。

$p=1$, $q=-\dfrac{1}{2}$, $r=\dfrac{1}{6}$ を①に代入すると， $a_{n+5}-a_{n+4}-\dfrac{1}{2}a_{n+3}-\dfrac{1}{6}a_{n+2}+sa_{n+1}-ta_n=0$ …①′

漸化式①′で， $n=-1$ とおくと， $a_4-a_3-\dfrac{1}{2}a_2-\dfrac{1}{6}a_1+sa_0-ta_{-1}=0$

$a_0=5$， $a_{-1}=\Sigma\alpha^{-1}=\dfrac{\Sigma\alpha\beta\gamma\delta}{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon}=\dfrac{s}{t}$ であるから， $4-3-\dfrac{1}{2}\cdot2-\dfrac{1}{6}\cdot1+s\cdot5-t\cdot\dfrac{s}{t}=0$ $\therefore s=\dfrac{1}{24}$

このとき，漸化式①′で， $n=0$ とおくと， $a_5-a_4-\dfrac{1}{2}a_3-\dfrac{1}{6}a_2+\dfrac{1}{24}a_1-ta_0=0$

$5-4-\dfrac{1}{2}\cdot3-\dfrac{1}{6}\cdot2+\dfrac{1}{24}\cdot1-5t=0$ $\therefore t=-\dfrac{19}{120}$

このとき，漸化式①′で， $n=1$ とおくと， $a_6-a_5-\dfrac{1}{2}a_4-\dfrac{1}{6}a_3+\dfrac{1}{24}a_2+\dfrac{19}{120}a_1=0$

$a_6-5-\dfrac{1}{2}\cdot4-\dfrac{1}{6}\cdot3+\dfrac{1}{24}\cdot2+\dfrac{19}{120}\cdot1=0$ $\therefore a_6=\dfrac{871}{120}$ 答

(*) $\Sigma\alpha^3-3\Sigma\alpha\beta\gamma=\Sigma\alpha(\Sigma\alpha^2-\Sigma\alpha\beta)$ すなわち，

$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+\delta^3+\varepsilon^3-3(\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\beta\varepsilon+\alpha\gamma\delta+\alpha\gamma\varepsilon+\alpha\delta\varepsilon+\beta\gamma\delta+\beta\gamma\varepsilon+\beta\delta\varepsilon+\gamma\delta\varepsilon)$

$=(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+\varepsilon^2-\alpha\beta-\alpha\gamma-\alpha\delta-\alpha\varepsilon-\beta\gamma-\beta\delta-\beta\varepsilon-\gamma\delta-\gamma\varepsilon-\delta\varepsilon)$ の証明

左辺$=(\alpha+\beta)^3+(\gamma+\delta)^3+\varepsilon^3-3(\alpha^2\beta+\alpha\beta^2)-3(\gamma^2\delta+\gamma\delta^2)-3(\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\beta\varepsilon+\alpha\gamma\delta+\alpha\gamma\varepsilon+\alpha\delta\varepsilon+\beta\gamma\delta+\beta\gamma\varepsilon$
$+\beta\delta\varepsilon+\gamma\delta\varepsilon)$

$=(\alpha+\beta)^3+(\gamma+\delta)^3+\varepsilon^3-3(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)\varepsilon+3(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)\varepsilon-3(\alpha^2\beta+\alpha\beta^2)-3(\gamma^2\delta+\gamma\delta^2)-3(\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\beta\varepsilon$
$+\alpha\gamma\delta+\alpha\gamma\varepsilon+\alpha\delta\varepsilon+\beta\gamma\delta+\beta\gamma\varepsilon+\beta\delta\varepsilon+\gamma\delta\varepsilon)$

$=(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)\{(\alpha+\beta)^2+(\gamma+\delta)^2+\varepsilon^2-(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)-(\gamma+\delta)\varepsilon-\varepsilon(\alpha+\beta)\}+3(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)\varepsilon-3(\alpha^2\beta$
$+\alpha\beta^2)-3(\gamma^2\delta+\gamma\delta^2)-3(\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\beta\varepsilon+\alpha\gamma\delta+\alpha\gamma\varepsilon+\alpha\delta\varepsilon+\beta\gamma\delta+\beta\gamma\varepsilon+\beta\delta\varepsilon+\gamma\delta\varepsilon)$

$=(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+\varepsilon^2-\alpha\beta-\alpha\gamma-\alpha\delta-\alpha\varepsilon-\beta\gamma-\beta\delta-\beta\varepsilon-\gamma\delta-\gamma\varepsilon-\delta\varepsilon+3\alpha\beta+3\gamma\delta)+$
$3(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)\varepsilon-3(\alpha^2\beta+\alpha\beta^2)-3(\gamma^2\delta+\gamma\delta^2)-3(\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\beta\varepsilon+\alpha\gamma\delta+\alpha\gamma\varepsilon+\alpha\delta\varepsilon+\beta\gamma\delta+\beta\gamma\varepsilon+\beta\delta\varepsilon+\gamma\delta\varepsilon)$

$=(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+\varepsilon^2-\alpha\beta-\alpha\gamma-\alpha\delta-\alpha\varepsilon-\beta\gamma-\beta\delta-\beta\varepsilon-\gamma\delta-\gamma\varepsilon-\delta\varepsilon)$
$+(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)(3\alpha\beta+3\gamma\delta)+3(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)\varepsilon-3(\alpha^2\beta+\alpha\beta^2)-3(\gamma^2\delta+\gamma\delta^2)-3(\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\beta\varepsilon+\alpha\gamma\delta$
$+\alpha\gamma\varepsilon+\alpha\delta\varepsilon+\beta\gamma\delta+\beta\gamma\varepsilon+\beta\delta\varepsilon+\gamma\delta\varepsilon)$

$=(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+\varepsilon^2-\alpha\beta-\alpha\gamma-\alpha\delta-\alpha\varepsilon-\beta\gamma-\beta\delta-\beta\varepsilon-\gamma\delta-\gamma\varepsilon-\delta\varepsilon)$
$+(\gamma+\delta+\varepsilon)(3\alpha\beta)+(\alpha+\beta+\varepsilon)(3\gamma\delta)+3(\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta)\varepsilon$
$-3\{\alpha\beta(\gamma+\delta+\varepsilon)+(\alpha+\beta+\varepsilon)\gamma\delta+(\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta)\varepsilon\}$
$=(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+\varepsilon^2-\alpha\beta-\alpha\gamma-\alpha\delta-\alpha\varepsilon-\beta\gamma-\beta\delta-\beta\varepsilon-\gamma\delta-\gamma\varepsilon-\delta\varepsilon)=$右辺 ■

別解2 (*) を使わない方法

$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)(x-\varepsilon)=x^5-px^4+qx^3-rx^2+sx-t=0$ とおく。

α は $f(x)=0$ の解であるから，$\alpha^5-p\alpha^4+q\alpha^3-r\alpha^2+s\alpha-t=0$

両辺に α^n を掛けると，$\alpha^{n+5}-p\alpha^{n+4}+q\alpha^{n+3}-r\alpha^{n+2}+s\alpha^{n+1}-t\alpha^n=0$

β，…，ε についても同様に，

$\beta^{n+5}-p\beta^{n+4}+q\beta^{n+3}-r\beta^{n+2}+s\beta^{n+1}-t\beta^n=0$，…，$\varepsilon^{n+5}-p\varepsilon^{n+4}+q\varepsilon^{n+3}-r\varepsilon^{n+2}+s\varepsilon^{n+1}-t\varepsilon^n=0$

これら 5 式を辺々加えると，$a_n=\alpha^n+\beta^n+\gamma^n+\delta^n+\varepsilon^n$ であるから，

$a_{n+5}-pa_{n+4}+qa_{n+3}-ra_{n+2}+sa_{n+1}-ta_n=0$ …①

次に，5 文字の対称式を Σ を用いて表すと，解と係数の関係により，

$p=\Sigma\alpha=1$，$q=\Sigma\alpha\beta=\frac{1}{2}\{(\Sigma\alpha)^2-\Sigma\alpha^2\}=\frac{1}{2}(1^2-2)=-\frac{1}{2}$，$r=\Sigma\alpha\beta\gamma$，$s=\Sigma\alpha\beta\gamma\delta$，$t=\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ である。

①に $p=1$, $q=-\frac{1}{2}$ を代入すると，$a_{n+5}-a_{n+4}-\frac{1}{2}a_{n+3}-ra_{n+2}+sa_{n+1}-ta_n=0$ …①'

漸化式①'で，$n=-2$ とおくと，$a_3-a_2-\frac{1}{2}a_1-ra_0+sa_{-1}-ta_{-2}=0$

ここで，$a_0=5$，$a_{-1}=\Sigma\alpha^{-1}=\frac{\Sigma\alpha\beta\gamma\delta}{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon}=\frac{s}{t}$，$a_{-2}=\frac{\Sigma\alpha^2\beta^2\gamma^2\delta^2}{(\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon)^2}=\frac{(\Sigma\alpha\beta\gamma\delta)^2-2\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\Sigma\alpha\beta\gamma}{(\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon)^2}=\frac{s^2-2tr}{t^2}$ で

あるから，$3-2-\frac{1}{2}\cdot1-r\cdot5+s\cdot\frac{s}{t}-t\cdot\frac{s^2-2rt}{t^2}=0$　$\therefore r=\frac{1}{6}$

このとき，漸化式①'で，$n=-1$ とおくと，$a_4-a_3-\frac{1}{2}a_2-\frac{1}{6}a_1+sa_0-ta_{-1}=0$

$a_0=5$，$a_{-1}=\Sigma\alpha^{-1}=\frac{\Sigma\alpha\beta\gamma\delta}{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon}=\frac{s}{t}$ であるから，$4-3-\frac{1}{2}\cdot2-\frac{1}{6}\cdot1+s\cdot5-t\cdot\frac{s}{t}=0$　$\therefore s=\frac{1}{24}$

このとき，漸化式①'で，$n=0$ とおくと，$a_5-a_4-\frac{1}{2}a_3-\frac{1}{6}a_2+\frac{1}{24}a_1-ta_0=0$

$5-4-\frac{1}{2}\cdot3-\frac{1}{6}\cdot2+\frac{1}{24}\cdot1-5t=0$　$\therefore t=-\frac{19}{120}$

このとき，漸化式①'で，$n=1$ とおくと，$a_6-a_5-\frac{1}{2}a_4-\frac{1}{6}a_3+\frac{1}{24}a_2+\frac{19}{120}a_1=0$

$a_6-5-\frac{1}{2}\cdot4-\frac{1}{6}\cdot3+\frac{1}{24}\cdot2+\frac{19}{120}\cdot1=0 \quad \therefore a_6=\frac{871}{120}$ 答

3．補足

次を証明せよ。

(1) n 次方程式 $x^n+a_1x^{n-1}+a_2{}^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$ の解の一つを α とすると，

$|\alpha|<max(|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_n|)+1$ が成り立つ。

(2) n 次方程式 $f(x)=0$ の n 個の解を α_i （$i=1, 2, \cdots, n$ ）とし，$t_k=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i{}^k$ とおくと，

十分大きな x の値に対して，$\frac{xf'(x)}{f(x)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t_k}{x^k}$ が成り立つ。

証明

(1) $max(|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_n|)+1=m$ …①とおく。

いま，$|\alpha|\geqq m+1$ …②と仮定する。

$x^n+a_1x^{n-1}+a_2{}^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$ より，$x^n=-a_1x^{n-1}-a_2{}^{n-2}-\cdots-a_{n-1}x-a_n$

$$|\alpha^n|=|-a_1\alpha^{n-1}-a_2\alpha^{n-2}-\cdots-a_{n-1}\alpha-a_n|$$
$$\leqq|a_1||\alpha|^{n-1}+|a_2||\alpha|^{n-2}+\cdots+|a_{n-1}||\alpha|+|a_n|$$
$$\leqq m(|\alpha|^{n-1}+|\alpha|^{n-2}+\cdots+|\alpha|+1) \quad (\because ①)$$
$$=\frac{m(|\alpha|^n-1)}{|\alpha|-1}$$
$$\leqq\frac{m(|\alpha|^n-1)}{m} \quad (\because ②)$$
$$=|\alpha|^n-1$$

よって，$|\alpha^n|\leqq|\alpha|^n-1$ となり，この不合理は②の仮定が原因である。

従って，$|\alpha|<max(|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_n|)+1$ 終

(2) $f(x)=a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)=a(x^n+a_1x^{n-1}+a_2{}^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n)=0$ とおける。

両辺の絶対値をとってから自然対数をとると，$\log|f(x)|=\log|a|+\sum_{i=1}^{n}\log|x-\alpha_i|$

両辺を x で微分すると，$\frac{f'(x)}{f(x)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x-\alpha_i}$

両辺に x を掛けると，$\frac{xf'(x)}{f(x)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{x}{x-\alpha_i}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1-\frac{\alpha_i}{x}}$ …①

(1)より，$|\alpha|<max(|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_n|)+1\leqq x$ なる x に対して，$\frac{\alpha_i}{x}<1$ より，

$\frac{1}{1-\frac{\alpha_i}{x}}=1+\frac{\alpha_i}{x}+\frac{\alpha_i{}^2}{x^2}+\cdots$ （収束する無限等比級数）であるから，①は，

$$\frac{xf'(x)}{f(x)}=\left(1+\frac{\alpha_1}{x}+\frac{\alpha_1{}^2}{x^2}+\cdots\right)+\left(1+\frac{\alpha_2}{x}+\frac{\alpha_2{}^2}{x^2}+\cdots\right)+\cdots+\left(1+\frac{\alpha_n}{x}+\frac{\alpha_n{}^2}{x^2}+\cdots\right)$$
$$=n+\frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}{x}+\frac{\alpha_1{}^2+\alpha_2{}^2+\cdots+\alpha_n{}^2}{x^2}+\cdots$$
$$=t_0+\frac{t_1}{x}+\frac{t_2}{x^2}+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t_k}{x^k}$$ 終

例 4次方程式 $x^4+4x^3+x^2+x+1=0$ の4つの解の10乗の和を求めよ。

解答 $f(x)=x^4+4x^3+x^2+x+1$ とおくと，$f'(x)=4x^3+12x^2+2x+1$ であるから，

$$\frac{xf'(x)}{f(x)}=\frac{4x^4+12x^3+2x^2+x}{x^4+4x^3+x^2+x+1}$$

普通に割り算をすると，

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12			
	4	-4	14	-55	206	-779	2951	-11176	42326	-160300	607099	-2299246	8707859			
1 4 1 1 1	4	12	2	1	0											
	4	16	4	4	4											
		-4	-2	-3	-4											
		-4	-16	-4	-4	-4										
			14	1	0	4										
			14	56	14	14	14									
				-55	-14	-10	-14									
				-55	-220	-55	-55	-55								
					206	45	41	55								
					206	824	206	206	206							
						-779	-165	-151	-206							
						-779	-3116	-779	-779	-779						
							2951	628	573	779						
							2951	11804	2951	2951	2951					
								-11176	-2378	-2172	-2951					
								-11176	-44704	-11176	-11176	-11176				
									42326	9004	8225	11176				
									42326	169304	42326	42326	42326			
										-160300	-34101	-31150	-42326			
										-160300	-641200	-160300	-160300	-160300		
											607099	129150	117974	160300		
											607099	2428396	607099	607099	607099	
												-2299246	-489125	-446799	-607099	
												-2299246	-9196984	-2299246	-2299246	-2299246
													8707859	1852447	1692147	2299246

よって，4つの解の10乗の和は，607099 答

(2021/11/16　ジョーカー)

(2021/12/10 加筆)