第 408 回

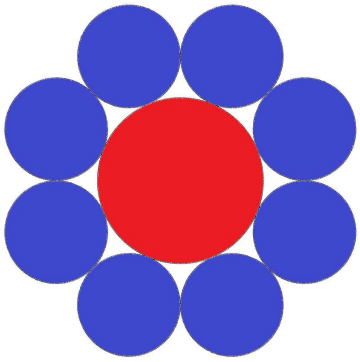
岐阜県大垣市外野釜笛　八幡宮　奉納算額　慶応元年（1865 年）

第 4 問題

囲円を 8 個の等円で囲む。

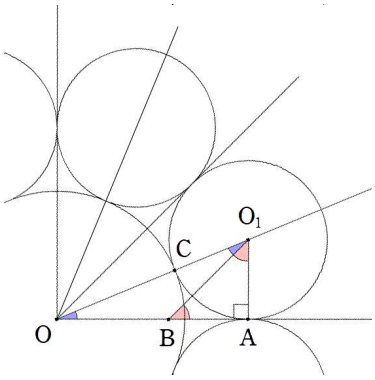
等円 8 個は互いに外接して囲円に接している。

囲円径を知って等円径を求めよ。



術文（答）　等円径＝$\dfrac{p}{2-p}$（囲円径），但し $p=\sqrt{2-\sqrt{2}}$

解答　図形を 4 分割して，図のように記号を付ける。




囲円と等円の一つをそれぞれ $O(r)$，$O_1(a)$ とおく。

$\angle O_1OA=\dfrac{\pi}{8}$

$AO_1=AB=a$，$BO_1=BO=\sqrt{2}a$ より，$OA=(1+\sqrt{2})a$

$\triangle O_1OA$ に三平方の定理を適用すると，

$OO_1=\sqrt{\{(1+\sqrt{2})a\}^2+a^2}=\sqrt{2(2+\sqrt{2})}\,a$

$r=OC=OO_1-CO_1=\sqrt{2(2+\sqrt{2})}\,a-a=(\sqrt{2(2+\sqrt{2})}-1)a$

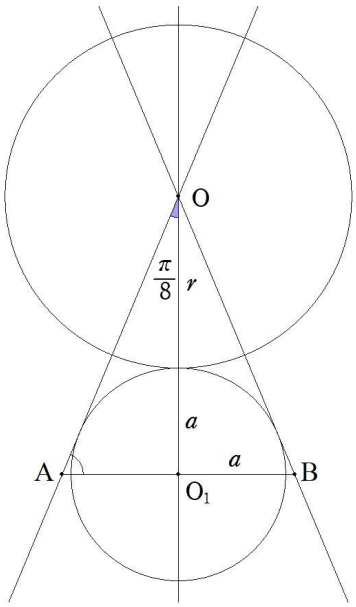
$\therefore a=\dfrac{1}{\sqrt{2(2+\sqrt{2})}-1}r$

分母，分子に $\sqrt{2-\sqrt{2}}$ を掛けると，$a=\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2-\sqrt{2-\sqrt{2}}}r$　…①

$\sqrt{2-\sqrt{2}}=p$ とおくと，$a=\dfrac{p}{2-p}r$

両辺を 2 倍して，等円径＝$\dfrac{p}{2-p}$（囲円径），但し $p=\sqrt{2-\sqrt{2}}$　答

別解　囲円を $O(r)$，等円の一つを $O_1(a)$ とおくと，$OO_1=r+a$




$\angle AOO_1=\dfrac{\pi}{8}$ より，$\angle OAO_1=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{8}$ であるから，第 2 問題で使用した公式 (*) を適用すると，

$OO_1=\sqrt{a^2\tan^2\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{8}\right)+a^2}=a\sqrt{cot^2\dfrac{\pi}{8}+1}$

ここで，$cot^2\dfrac{\pi}{8}=\dfrac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{1-\cos\frac{\pi}{4}}=\dfrac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}=3+2\sqrt{2}$ であるから，

$OO_1=a\sqrt{4+2\sqrt{2}}=r+a$ より，$r=(\sqrt{1+3+2\sqrt{2}}-1)a$

$\therefore a=\dfrac{1}{\sqrt{2(2+\sqrt{2})}-1}r=\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2-\sqrt{2-\sqrt{2}}}r=\dfrac{p}{2-p}r$

両辺を 2 倍して，等円径＝$\dfrac{p}{2-p}$（囲円径），但し $p=\sqrt{2-\sqrt{2}}$　答

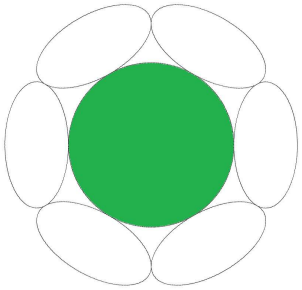
補足　①の分母を有理化すると，$a=(3-2\sqrt{2}+\sqrt{20-14\sqrt{2}})r \fallingdotseq 0.619914r$

第５問題

囲円を６個の等楕円で囲む。

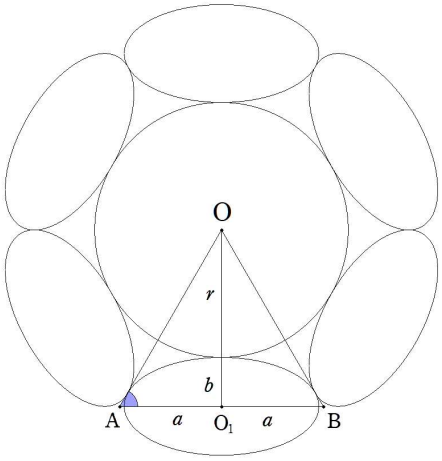
楕円の短径の端は囲円に接する。

楕円の長径と短径とを知って囲円径を求めよ。



術文（答）　囲円径＝$\sqrt{3\cdot 長径巾+短径巾}-短径$

解答　囲円をO$(r)$，一つの楕円の中心を$O_1$，長径を$2a$，短径を$2b$とおき，図のように記号を付ける。




$\angle$OAB＝60°より，第２問題で使用した公式(*)を適用すると，

$OO_1=\sqrt{a^2\tan^2 60^\circ+b^2}=\sqrt{3a^2+b^2}=r+b$ より，

$r=\sqrt{3a^2+b^2}-b$

両辺に２を掛けると，囲円径＝$\sqrt{3\cdot 長径巾+短径巾}-短径$　答

補足　なお，７個の等楕円の場合は，$\angle OAB=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{7}$ であるから，

$r=\sqrt{a^2cot^2\frac{\pi}{7}+b^2}-b$となる。

（2021/12/12　ジョーカー）