第408回　追加問題

1．x^{2022} を $x^4+x^3+2x^2+x+1$ で割ったときの余りを求めよ。

解答　$x^4+x^3+2x^2+x+1=(x^2+1)(x^2+x+1)=0$ とおくと，$x=\pm i,\ \omega,\ \omega^2\left(\omega=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}\right)$

x^{2022} を $(x^2+1)(x^2+x+1)$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを ax^3+bx^2+cx+d （$a,\ b,\ c,\ d$ は実数）とおくと，

$x^{2022}=(x^2+1)(x^2+x+1)\ Q(x)+ax^3+bx^2+cx+d$　…①

①に $x=i$ を代入すると，$i^{2022}=ai^3+bi^2+ci+d$

$i^2=-1$，$i^3=-i$，$i^{2022}=(i^2)^{1011}=(-1)^{1011}=-1$ であるから，　$\therefore -1=-ai-b+ci+d$

複素数の相等より，$-a+c=0$　…②，$-b+d=-1$　…③

①に $x=\omega$ を代入すると，$\omega^{2022}=a\omega^3+b\omega^2+c\omega+d$

$\omega^3=1$，$\omega^{2022}=(\omega^3)^{674}=1$，$\omega^2=-1-\omega$ であるから，　$\therefore 1=a+b(-1-\omega)+c\omega+d$

複素数の相等より，$-b+c=0$　…④，$a-b+d=1$　…⑤

②～⑤を連立させて解くと，$a=b=c=2$，$d=1$

よって，求める余りは，$2x^3+2x^2+x+1$　答

2．2022 年から始まる n 個の西暦の中から 1 個を除き，平均を計算すると 2062.2 となった。除いた西暦を求めよ。

解答　n 個の西暦を次のように並べる。

2022，2023，…，$2021+n$

除く西暦を $2021+m$ とおくと，$1\leqq m\leqq n$ …①である。

平均は，$2062.2=2021+52.2$ となる。

立式すると，$\dfrac{(1+2+\cdots+n)-m}{n-1}=52.2$，$\dfrac{\frac{1}{2}n(n+1)-m}{n-1}=52+\dfrac{1}{5}$

m について解くと，$\therefore m=\dfrac{5n^2-407n+412}{10}$　…②

これを①に代入すると，$1\leqq\dfrac{5n^2-407n+412}{10}\leqq n$

[1]　$1\leqq\dfrac{5n^2-407n+412}{10}$ より，$(n-1)(5n-402)\geqq 0$　$\therefore n\leqq 1$，$80+\dfrac{1}{5}\leqq n$　…③

[2]　$\dfrac{5n^2-407n+412}{10}\leqq n$ より，$(n-1)(5n-412)\leqq 0$　$\therefore 1\leqq n\leqq 82+\dfrac{1}{5}$　…④

n は正の整数であるから，③，④より，$n=81$，82

$n=81$ のとき，②より，$m=25$　このとき，求める西暦は，$2021+25=2046$

$n=82$ のとき，②より，$m=\dfrac{329}{5}$（不適）

よって，除いた西暦は，2046　答

3．x の小数第1位を四捨五入して整数にした値を $<x>$ で表すとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{2022}\frac{1}{<\sqrt[4]{k}>}$ の値を求めよ。

解答　$<\sqrt[4]{n}>=a$ とおくと，$a-\dfrac{1}{2}<\sqrt[4]{n}<a+\dfrac{1}{2}$ を満たす。

各辺を4乗すると，$\left(a-\dfrac{1}{2}\right)^4<n<\left(a+\dfrac{1}{2}\right)^4$ …①

ここで，$\left(a-\dfrac{1}{2}\right)^4=a^4-2a^3+\dfrac{3}{2}a^2-\dfrac{1}{2}a+\dfrac{1}{16}=a^4-2a^3+a^2+\dfrac{1}{2}a(a-1)+\dfrac{1}{16}$

同様に，$\left(a+\dfrac{1}{2}\right)^4=a^4+2a^3+a^2+\dfrac{1}{2}a(a+1)+\dfrac{1}{16}$

$\dfrac{1}{2}a(a+1)$ は整数だから，①より，$a^4-2a^3+a^2+\dfrac{1}{2}a(a-1)+1\leqq n\leqq a^4+2a^3+a^2+\dfrac{1}{2}a(a+1)$

この不等式を満たす n の個数は，

$a^4+2a^3+a^2+\dfrac{1}{2}a(a+1)-\{a^4-2a^3+a^2+\dfrac{1}{2}a(a-1)+1\}+1=a(4a^2+1)$　…②

さて，$6.5^4=1785.0625$，$7.5^4=3164.0625$ であるから，$\left(a-\dfrac{1}{2}\right)^4<2022<\left(a+\dfrac{1}{2}\right)^4$ を満たす整数 a は，$a=7$

よって，$\displaystyle\sum_{k=1}^{2022}\frac{1}{f(k)}=\sum_{a=1}^{6}\frac{1}{a}\times a(4a^2+1)+\sum_{k=1786}^{2022}\frac{1}{f(k)}=4\times\frac{1}{6}\cdot6\cdot7\cdot13+6+\frac{1}{7}(2022-1786+1)=\frac{2827}{7}$　答

別解

$1.5^4=5.0625$，$2.5^4=39.0625$，$3.5^4=150.0625$，$4.5^4=410.0625$，$5.5^4=915.0625$，$6.5^4=1785.0625$，

$7.5^4=3164.0625$ であるから，

$<\sqrt[4]{n}>=a$ となる n の値の個数について調べると，

$a=1$ のとき，$1\leqq n\leqq5$ より，5個

$a=2$ のとき，$6\leqq n\leqq39$ より，$39-6+1=34$ 個

$a=3$ のとき，$40\leqq n\leqq150$ より，$150-40+1=111$ 個

$a=4$ のとき，$151\leqq n\leqq410$ より，$410-151+1=260$ 個

$a=5$ のとき，$411\leqq n\leqq915$ より，$915-411+1=505$ 個

$a=6$ のとき，$916\leqq n\leqq1785$ より，$1785-916+1=870$ 個

$a=7$ のとき，$1786\leqq n\leqq2022$ より，$2022-1786+1=237$ 個

よって，$\displaystyle\sum_{k=1}^{2022}\frac{1}{f(k)}=1\times5+\frac{1}{2}\times34+\frac{1}{3}\times111+\frac{1}{4}\times260+\frac{1}{5}\times505+\frac{1}{6}\times870+\frac{1}{7}\times237=\frac{2827}{7}$　答

4．x を超えない最大の整数を $[x]$ で表すとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{2022}\frac{1}{[\sqrt[4]{k}]}$ の値を求めよ。

解答

$2^4=16$，$3^4=81$，$4^4=256$，$5^4=625$，$6^4=1296$，$7^4=2401$ であるから，

$[\sqrt[4]{n}]=a$ となる n の値の個数について調べると，

$a=1$ のとき，$1\leqq n\leqq 15$ より，15 個

$a=2$ のとき，$16\leqq n\leqq 80$ より，$80-16+1=65$ 個

$a=3$ のとき，$81\leqq n\leqq 255$ より，$255-81+1=175$ 個

$a=4$ のとき，$256\leqq n\leqq 624$ より，$624-256+1=369$ 個

$a=5$ のとき，$625\leqq n\leqq 1295$ より，$1295-625+1=671$ 個

$a=6$ のとき，$1296\leqq n\leqq 2022$ より，$2022-1296+1=727$ 個

よって，$\displaystyle\sum_{k=1}^{2022}\frac{1}{f(k)}=1\times 15+\frac{1}{2}\times 65+\frac{1}{3}\times 175+\frac{1}{4}\times 369+\frac{1}{5}\times 671+\frac{1}{6}\times 727=\frac{9069}{20}$ 答

（2021/12/12　ジョーカー）