● 問題 408 解答＜三角定規＞

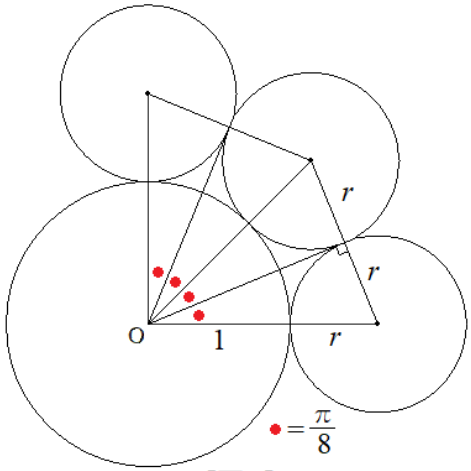
［第４問題］

囲円の半径を 1，等円の半径を r とするとそれらは右**図１**のようになる。

$\sin\frac{\pi}{8}=\alpha$ と置くと　$\alpha=\frac{r}{1+r}$　だから　$r=\frac{\alpha}{1-\alpha}$　…①

また，$\alpha=\sin\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1-\cos(\pi/4)}{2}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$　…②

①②より $p=\sqrt{2-\sqrt{2}}$ と置き，$r=\boldsymbol{\frac{p}{2-p}}$　…[答]



［図１］

［第５問題］

囲円の半径を R, 楕円の長径を a, 短径を b とするとそれらは下**図２**のようになる。図の，中心が y 軸上にある楕円 E の方程式は

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(y-R-b)^2}{b^2}=1 \quad \cdots③$$

で，図のようにこれが直線　$y=\sqrt{3}\,x$ …④　に接する。

このことは，③④から y を消去した x の方程式

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(\sqrt{3}\,x-R-b)^2}{b^2}=1 \quad \cdots⑤$$

が重解を持つことと同値であり，⑤を分母を払い整理すると

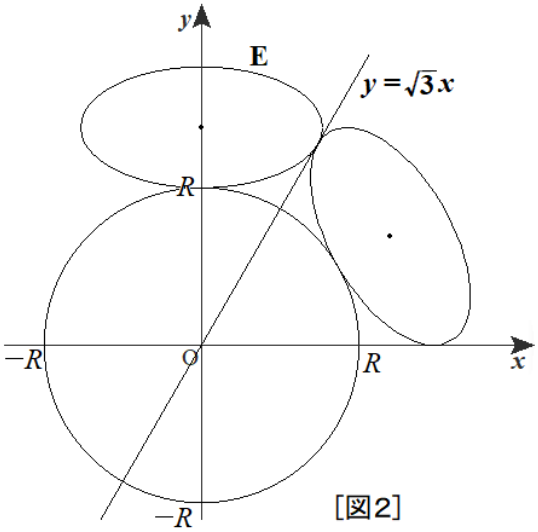
$$(3a^2+b^2)x^2-2\sqrt{3}\,a^2(b+R)x+a^2R^2+2a^2bR=0 \quad \cdots⑥$$

よって，⑥の判別式

$$D/4=3a^4(b+R)^2-(3a^2+b^2)(a^2R^2+2a^2bR)=\cdots=-b^2(R^2+2bR-3a^2)=0$$

$$\therefore\ R^2+2bR-3a^2=0$$

$$\therefore\ R=\boldsymbol{-b+\sqrt{3a^2+b^2}} \quad \cdots［答］(\because\ R>0)$$



［図２］