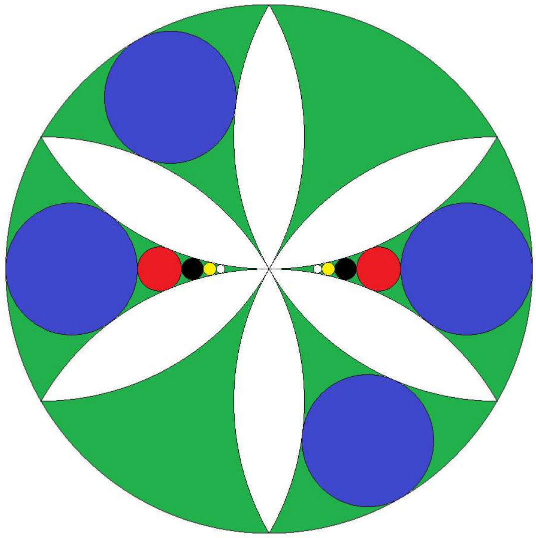
第 409 回

岐阜県大垣市外野釜笛　八幡宮　奉納算額　慶応元年（1865 年）

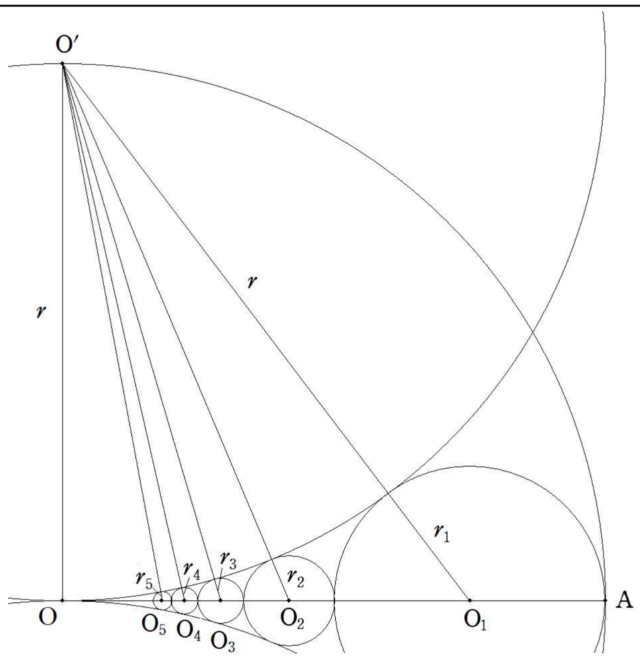
第 6 問題

外円内にこの円と同じ半径の円弧を左右上下につくり，
その隙間に青赤黒黄白の 5 個の円を入れる。
外円径を知って各々の累円径を求めよ。



術文（答）　累円径 $2r_n=\dfrac{1}{1+2+3+\cdots+n}\left(\dfrac{\text{外円径}}{4}\right)$，
（ $n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ ）

解答　必要な円弧を残し，図のように記号を付ける。
外円を $\mathrm{O}(r)$，同径の円を $\mathrm{O}'(r)$ とする。
青，赤，黒，黄，白円をそれぞれ $\mathrm{O}_1(r_1)$，$\mathrm{O}_2(r_2)$，
$\mathrm{O}_3(r_3)$，$\mathrm{O}_4(r_4)$，$\mathrm{O}_5(r_5)$ とおく。



$\triangle\mathrm{O}'\mathrm{O}\mathrm{O}_1$ に三平方の定理を適用すると，

$(r+r_1)^2-(r-r_1)^2=r^2\quad 4rr_1=r^2\quad\therefore r_1=\dfrac{r}{4}\quad\cdots①$

同様に $\triangle\mathrm{O}'\mathrm{O}\mathrm{O}_2$ について，

$(r+r_2)^2-(r-2r_1-r_2)^2=r^2$

$\triangle\mathrm{O}'\mathrm{O}\mathrm{O}_3$ から，

$(r+r_3)^2-(r-2r_1-2r_2-r_3)^2=r^2$

$\triangle\mathrm{O}'\mathrm{O}\mathrm{O}_4$ から，

$(r+r_4)^2-(r-2r_1-2r_2-2r_3-r_4)^2=r^2$

一般に，$\triangle\mathrm{O}'\mathrm{O}\mathrm{O}_n$ から，

$(r+r_n)^2-(r-2r_1-2r_2-\cdots-2r_{n-1}-r_n)^2=r^2\quad\cdots②$

$\triangle\mathrm{O}'\mathrm{O}\mathrm{O}_{n+1}$ から，

$(r+r_{n+1})^2-(r-2r_1-2r_2-\cdots-2r_n-r_{n+1})^2=r^2\quad\cdots③$

②−③を，$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ に注意して計算すると，

$(2r+r_n+r_{n+1})(r_n-r_{n+1})-(2r-4r_1-4r_2-\cdots-3r_n-r_{n+1})(r_n+r_{n+1})=0$

ここで，$r_1+r_2+\cdots+r_n=R_n$ とおくと，$(2r+r_n+r_{n+1})(r_n-r_{n+1})-(2r-4R_n+r_n-r_{n+1})(r_n+r_{n+1})=0$

$2r(r_n-r_{n+1})-(2r-4R_n)(r_n+r_{n+1})=0$　展開して r_{n+1} について解くと，$r_{n+1}=\dfrac{r_nR_n}{r-R_n}\quad\cdots④$

この漸化式から順次 r_n を求めてみる。

$R_1=r_1=\dfrac{r}{4}$ より，$r_2=\dfrac{\left(\dfrac{r}{4}\right)^2}{r-\dfrac{r}{4}}=\dfrac{r}{12}$

$R_2=r_1+r_2=\dfrac{r}{4}+\dfrac{r}{12}=\dfrac{r}{3}$ より，$r_3=\dfrac{\dfrac{r}{12}\cdot\dfrac{r}{3}}{r-\dfrac{r}{3}}=\dfrac{r}{24}$

$R_3=R_2+r_3=\dfrac{r}{3}+\dfrac{r}{24}=\dfrac{3r}{8}$ より，$r_4=\dfrac{\dfrac{r}{24}\cdot\dfrac{3r}{8}}{r-\dfrac{3r}{8}}=\dfrac{r}{40}$

$R_4=R_3+r_4=\dfrac{3r}{8}+\dfrac{r}{40}=\dfrac{2r}{5}$ より，$r_5=\dfrac{\dfrac{r}{40}\cdot\dfrac{2r}{5}}{r-\dfrac{2r}{5}}=\dfrac{r}{60}$

さて，r_1 から r_5 までの分母を数列 $\{a_n\}$ とおき，並べると，4, 12, 24, 40, 60,

階差数列 $\{b_n\}$ は，8, 12, 16, 20,

これは初項 8，公差 4 の等差数列であるから，$b_n=8+4(n-1)=4(n+1)$

$n\geqq 2$ のとき，$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}4(k+1)=4+4\left\{\dfrac{1}{2}(n-1)n+(n-1)\right\}=2n(n+1)$

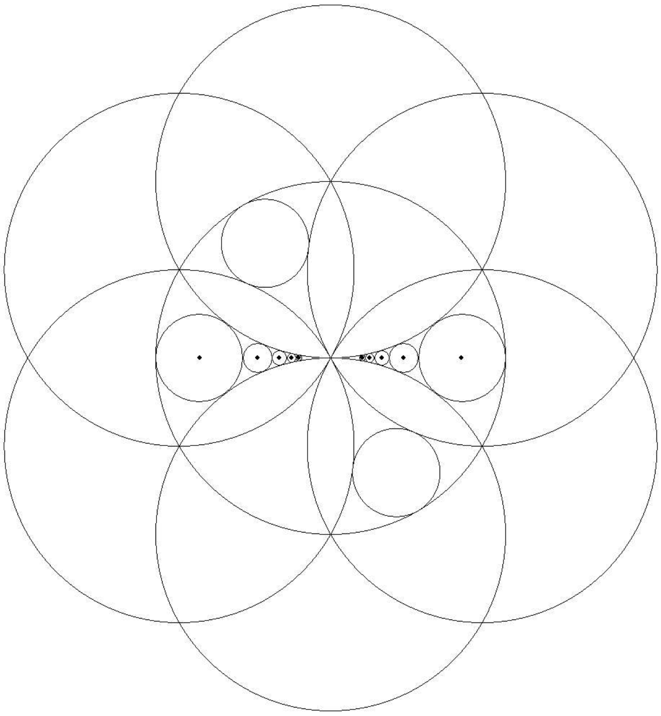
この式に，$n=1$ を代入すると $a_1=4$ となり，$a_n=2n(n+1)$ は $n\geqq 1$ で成り立つ。

よって，$r_n=\dfrac{r}{2n(n+1)}$ より，累円径 $2r_n=\dfrac{1}{2n(n+1)}\cdot$(外円径)　答

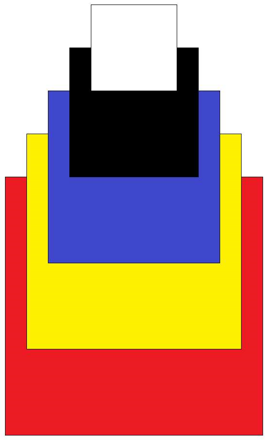
また，$r_n=\dfrac{1}{\dfrac{n(n+1)}{2}}\cdot\dfrac{r}{4}=\dfrac{1}{1+2+\cdots+n}\cdot\dfrac{r}{4}$ と表すこともできるから，

累円径 $2r_n=\dfrac{1}{1+2+3+\cdots+n}\left(\dfrac{外円径}{4}\right)$　（術文の答）

（参考図）



第７問題
五個の正方形，赤，黄，青，黒，白の１辺の差は等しい。
赤と黄との面積の和および青と黒と白の面積の和とを知って，白の面積を求めよ。



術文（答）　赤黄の面積の和を l，青黒白の面積の和を m とすると，

白の１辺$=\sqrt{\dfrac{213m-17l-16\sqrt{-6l^2+43lm-m^2}}{365}}$

解答　白の１辺を x，差を y （ $y>0$ ）とすると，

黒，青，黄，赤の１辺は，順に， $x+y$， $x+2y$， $x+3y$， $x+4y$ となるから，

仮定より， $(x+4y)^2+(x+3y)^2=l$， $(x+2y)^2+(x+y)^2+x^2=m$ となる。

整理すると， $2x^2+14xy+25y^2=l$　…①　$3x^2+6xy+5y^2=m$　…②

①× m −②× l より， $(2m-3l)x^2+2(7m-3l)xy+(25m-5l)y^2=0$

[1]　$l=5m$ のとき， $-mx(13x+16y)=0$　　$x>0$，$y>0$ の解はないから不適。

[2]　$l\fallingdotseq 5m$ のとき，

$$y=\frac{-3l+7m\pm\sqrt{(7m-3l)^2-(25m-5l)(2m-3l)}}{5(l-5m)}x=\frac{-3l+7m\pm\sqrt{-6l^2+43lm-m^2}}{5(l-5m)}x$$

これを②に代入すると，

$$3x^2+6x\cdot\frac{-3l+7m\pm\sqrt{-6l^2+43lm-m^2}}{5(l-5m)}x+5\left\{\frac{-(7m-3l)\sqrt{-6l^2+43lm-m^2}}{5(l-5m)}x\right\}^2=m$$

整理すると， $(17l-213m)x^2+5l^2-50lm+125m^2=\pm\sqrt{-6l^2+43lm-m^2}\,x^2$

$x^2=S$ とおくと， S は求める白の面積となる。

$(17l-213m)S+5l^2-50lm+125m^2=\pm\sqrt{-6l^2+43lm-m^2}\,S$

両辺を２乗して移項すると， $\{(17l-213m)S+5l^2-50lm+125m^2\}^2-\{\pm\sqrt{-6l^2+43lm-m^2}\,S\}^2=0$

$5(l-5m)^2\{365S^2+2(17l-213m)S+5(l-5m)^2\}=0$

$l\fallingdotseq 5m$ であるから，$365S^2+2(17l-231m)S+5(l-5m)^2=0$

$$S=\frac{-(17l-231m)\pm\sqrt{(17l-213m)^2-365\cdot5(l-5m)^2}}{365}=\frac{-17l+231m\pm16\sqrt{-6l^2+43lm-m^2}}{365}$$

複号を選ぶために，具体例を考える。

$x=y=1$ のとき，$l=2x^2+14xy+25y^2=41$， $m=3x^2+6xy+5y^2=14$ であるから，

$$S=x^2=\frac{-17l+231m+16\sqrt{-6l^2+43lm-m^2}}{365}=\frac{29\sqrt{73}}{73}>3\quad x>1.732\text{（不適）}$$

$$S=x^2=\frac{-17l+231m-16\sqrt{-6l^2+43lm-m^2}}{365}=1\quad\therefore\ x=1\text{（適）}$$

複号はマイナスの方が適する。

よって，題意に適するのは， $S=\dfrac{-17l+231m-16\sqrt{-6l^2+43lm-m^2}}{365}$　答

補足　白の1辺は，$x=\sqrt{\dfrac{-17l+213m-16\sqrt{-6l^2+43lm-m^2}}{365}}$

（2022/1/9　ジョーカー）