第408回　追加問題

$a_1 \fallingdotseq 2$， $a_n a_m = a_{n+m} + a_{n-m}$， $a_{n+7} = a_n$ （n，m は整数）で定義される0と異なる数列 $\{a_n\}$ について，次の値を求めよ。

(1)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{2022} a_k{}^2$

解答　$a_n a_m = a_{n+m} + a_{n-m}$　…①，$a_{n+7} = a_n$　…②とおく。

①に $m=0$ を代入すると，$a_n a_0 = a_n + a_n$　$a_n(a_0-2)=0$　$a_n \fallingdotseq 0$ より，$a_0 = 2$　…③

①に $n=0$ を代入すると，$a_0 a_m = a_m + a_{-m}$

$a_0 = 2$ より，$2a_m = a_m + a_{-m}$　$\therefore a_{-m} = a_m$　よって，$a_{-n} = a_n$　…④

②より，数列 $\{a_n\}$ は7を周期とする数列である。$m>0$ のとき，

$a_n = a_{n+7} = a_{n+7\cdot 2} = \cdots = a_{n+7m}$　…⑤，$a_n = a_{n-7} = a_{n-7\cdot 2} = \cdots = a_{n-7m}$　…⑥

⑤，⑥より，m を整数として，$a_n = a_{n+7m}$ であるから，$a_{n+7m} = a_n$　…⑦

$\boxed{a_1 = a}$とおく。

①に $n=m=1$ を代入すると，$a_1{}^2 = a_2 + a_0$　$\therefore a_2 = a_1{}^2 - a_0 = a^2 - 2$　…⑧

①に $n=2$，$m=1$ を代入すると，$a_2 a_1 = a_3 + a_1$　$\therefore a_3 = a_2 a_1 - a_1 = (a^2-2)a - a = a^3 - 3a$　…⑨

①に $n=m=2$ を代入すると，$a_2{}^2 = a_4 + a_0$　$\therefore a_4 = a_2{}^2 - a_0 = (a^2-2)^2 - 2 = a^4 - 4a^2 + 2$　…⑩

②で $n=-3$ を代入すると，④より，$a_4 = a_{-3} = a_3$

これに⑩，⑨を代入すると，$a^4 - 4a^2 + 2 = a^3 - 3a$ より，$(a-2)(a^3+a^2-2a-1)=0$

$a = a_1 \fallingdotseq 2$ であるから，$a^3 + a^2 - 2a - 1 = 0$　…⑪

⑪を用いると，$a_3 = a^3 - 3a = (-a^2+2a+1) - 3a = -a^2 - a + 1$　…⑨′

以上より，$a_1 + a_2 + a_3 = a + (a^2-2) + (-a^2+2a+1) = -1$　…⑫

また，④，⑦より，a_n の値は次の4通りである。

[1]　$n=7m$ のとき，$a_n = a = 2$

[2]　$n=7m\pm 1$ のとき，$a_n = a_1 = a$

[3]　$n=7m\pm 2$ のとき，$a_n = a_2 = a^2 - 2$

[4]　$n=7m\pm 3$ のとき，$a_n = a_3 = -a^2 - a + 1$　（以上∗）

次に，①に $m=n$ を代入すると，$a_n{}^2 = a_{2n} + a_0 = a_{2n} + 2$ である。2022＝7×289－1 であるから，

$$\sum_{k=1}^{2022} a_k{}^2 = 289\sum_{k=1}^{7} a_k{}^2 - a_{2023}{}^2 = 289\sum_{k=1}^{7}(a_{2k}+2) - 2^2 = 289\sum_{k=1}^{7} a_{2k} + 289\times 2\cdot 7 - 2^2$$

ここで，∗より，$\displaystyle\sum_{k=1}^{7} a_{2k} = a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} + a_{12} + a_{14} = a_2 + a_3 + a_1 + a_1 + a_3 + a_2 + a_0$

$= a_0 + 2(a_1 + a_2 + a_3) = 2 + 2(-1)$　（∵⑫）$= 0$ であるから，

よって，$\displaystyle\sum_{k=1}^{2022} a_k{}^2 = 289\times 0 + 4046 - 4 = 4042$　答

別解

a_n は7を周期とする数列である。三角関数も周期関数である。

$\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$ より，$2\cos\alpha\cdot 2\cos\beta = 2\cos(\alpha+\beta) + 2\cos(\alpha-\beta)$ で，

$\cos(\alpha+2n\pi)=\cos\alpha$ であるから，$a_n=2\cos\dfrac{2n\pi}{7}$ と表すと，

条件 $a_n\fallingdotseq 0$ ，$a_1\fallingdotseq 2$ ，$a_na_m=a_{n+m}+a_{n-m}$ ，$a_{n+7}=a_n$ （n ，m は整数）を満たす。

このとき，

$$a_n{}^2=\left(2\cos\frac{2n\pi}{7}\right)^2=2\left(1+\cos\frac{4n\pi}{7}\right)=2+\frac{2\cos\dfrac{4n\pi}{7}\sin\dfrac{2\pi}{7}}{\sin\dfrac{2\pi}{7}}=2+\frac{\sin\dfrac{2(2n+1)\pi}{7}-\sin\dfrac{2(2n-1)\pi}{7}}{\sin\dfrac{2\pi}{7}}$$

であるから，

$$\sum_{k=1}^{2022}a_k{}^2=\sum_{k=1}^{2022}\left\{2+\frac{\sin\dfrac{2(2k+1)\pi}{7}-\sin\dfrac{2(2k-1)\pi}{7}}{\sin\dfrac{2\pi}{7}}\right\}=2\cdot 2022+\frac{\sin\dfrac{2(2\cdot 2022+1)\pi}{7}-\sin\dfrac{2\pi}{7}}{\sin\dfrac{2\pi}{7}}$$

$$=4044+\frac{\sin\left(1156\pi-\dfrac{2\pi}{7}\right)-\sin\dfrac{2\pi}{7}}{\sin\dfrac{2\pi}{7}}=4044+\frac{-\sin\dfrac{2\pi}{7}-\sin\dfrac{2\pi}{7}}{\sin\dfrac{2\pi}{7}}=4042 \quad \text{答}$$

別解2

$a_na_m=a_{n+m}+a_{n-m}$ …①，$a_{n+7}=a_n$ …②とおく。

①に $m=0$ を代入すると，$a_na_0=a_n+a_n$　$a_n(a_0-2)=0$　$a_n\fallingdotseq 0$ より，$a_0=2$ …③

①に $n=0$ を代入すると，$a_0a_m=a_m+a_{-m}$

$a_0=2$ より，$2a_m=a_m+a_{-m}$　$\therefore a_{-m}=a_m$　よって，$a_{-n}=a_n$ …④

②より，数列 $\{a_n\}$ は 7 を周期とする数列である。$m>0$ のとき，

$a_n=a_{n+7}=a_{n+7\cdot 2}=\cdots=a_{n+7m}$ …⑤，$a_n=a_{n-7}=a_{n-7\cdot 2}=\cdots=a_{n-7m}$ …⑥

⑤，⑥より，m を整数として，$a_n=a_{n+7m}$ であるから，$a_{n+7m}=a_n$ …⑦

$\boxed{a_1=a}$ とおく。

①に $n=m=1$ を代入すると，$a_1{}^2=a_2+a_0$　$\therefore a_2=a_1{}^2-a_0=a^2-2$ …⑧

①に $n=2$，$m=1$ を代入すると，$a_2a_1=a_3+a_1$　$\therefore a_3=a_2a_1-a_1=(a^2-2)a-a=a^3-3a$ …⑨

①に $n=m=2$ を代入すると，$a_2{}^2=a_4+a_0$　$\therefore a_4=a_2{}^2-a_0=(a^2-2)^2-2=a^4-4a^2+2$ …⑩

②で $n=-3$ を代入すると，④より，$a_4=a_{-3}=a_3$

これに⑩，⑨を代入すると，$a^4-4a^2+2=a^3-3a$ より，$(a-2)(a^3+a^2-2a-1)=0$

$a=a_1\fallingdotseq 2$ であるから，$a^3+a^2-2a-1=0$ …⑪

⑪を用いると，$a_3=a^3-3a=(-a^2+2a+1)-3a=-a^2-a+1$ …⑨′

よって，④，⑦より，a_n の値は次の 4 通りである。

[1]　$n=7m$ のとき，$a_n=a=2$

[2]　$n=7m\pm 1$ のとき，$a_n=a_1=a$

[3]　$n=7m\pm 2$ のとき，$a_n=a_2=a^2-2$

[4]　$n=7m\pm 3$ のとき，$a_n=a_3=-a^2-a+1$

次に，$2022=7\times 289-1$ であるから，

$$\sum_{k=1}^{2022}a_k{}^2=289(a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2+a_4{}^2+a_5{}^2+a_6{}^2+a_7{}^2)-a_{2023}{}^2$$

$= 289({a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2+{a_3}^2+{a_2}^2+{a_1}^2+{a_0}^2)-{a_0}^2$

$= 289\{{a_0}^2+2({a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2)\}-{a_0}^2$

$= 289\{{a_0}^2+2(a_1+a_2+a_3)^2-4(a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1)\}-{a_0}^2 =★$

ここで，$f(x)=x^3+x^2-2x-1=0$ …⑫とおくと，

$a_1=a$ であるから，$f(a_1)=a^3+a^2-2a-1=0$

$a_2=a^2-2$ であるから，$f(a_2)=(a^2-2)^3+(a^2-2)^2-2(a^2-2)-1=(a^3+a^2-2a-1)(a^3-a^2-2a+1)=0$

⑪より，$a_3=a^3-3a=(-a^2+2a+1)-3a=-a^2-a+1$であるから，

$f(a_3)=(-a^2-a+1)^3+(-a^2-a+1)^2-2(-a^2-a+1)-1=-(a^3+a^2-2a-1)(a^3+2a^2-a-1)=0$

$a_0=2$ で，a_1，a_2，a_3 は，方程式⑫の 3 つの解であるから，解と係数の関係により，

$a_1+a_2+a_3=-1$，$a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1=-2$

よって，$\displaystyle\sum_{k=1}^{2022}{a_k}^2=289\{2^2+2(-1)^2-4(-2)\}-2^2=4042$ 答

---

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{2022}\frac{1}{{a_k}^3}$

解答 $a_na_m=a_{n+m}+a_{n-m}$ …①，$a_{n+7}=a_n$ …②とおく。

①に $m=0$ を代入すると，$a_na_0=a_n+a_n$　$a_n(a_0-2)=0$　$a_n\fallingdotseq 0$ より，$a_0=2$ …③

①に $n=0$ を代入すると，$a_0a_m=a_m+a_{-m}$

$a_0=2$ より，$2a_m=a_m+a_{-m}$　$\therefore a_{-m}=a_m$　よって，$a_{-n}=a_n$ …④

②より，数列 $\{a_n\}$ は 7 を周期とする数列である。$m>0$ のとき，

$a_n=a_{n+7}=a_{n+7\cdot2}=\cdots=a_{n+7m}$ …⑤，$a_n=a_{n-7}=a_{n-7\cdot2}=\cdots=a_{n-7m}$ …⑥

⑤，⑥より，m を整数として，$a_n=a_{n+7m}$ であるから，$a_{n+7m}=a_n$ …⑦

$\boxed{a_1=a}$とおく。

①に $n=m=1$ を代入すると，${a_1}^2=a_2+a_0$　$\therefore a_2={a_1}^2-a_0=a^2-2$ …⑧

①に $n=2,\ m=1$ を代入すると，$a_2a_1=a_3+a_1$　$\therefore a_3=a_2a_1-a_1=(a^2-2)a-a=a^3-3a$ …⑨

①に $n=m=2$ を代入すると，${a_2}^2=a_4+a_0$　$\therefore a_4={a_2}^2-a_0=(a^2-2)^2-2=a^4-4a^2+2$ …⑩

②で $n=-3$ を代入すると，④より，$a_4=a_{-3}=a_3$

これに⑩，⑨を代入すると，$a^4-4a^2+2=a^3-3a$ より，$(a-2)(a^3+a^2-2a-1)=0$

$a=a_1\fallingdotseq 2$ であるから，$a^3+a^2-2a-1=0$ …⑪

⑪を用いると，$a_3=a^3-3a=(-a^2+2a+1)-3a=-a^2-a+1$ …⑨′

よって，④，⑦より，a_n の値は次の 4 通りである。

[1] $n=7m$ のとき，$a_n=a=2$

[2] $n=7m\pm1$ のとき，$a_n=a_1=a$

[3] $n=7m\pm2$ のとき，$a_n=a_2=a^2-2$

[4] $n=7m\pm3$ のとき，$a_n=a_3=-a^2-a+1$

ここで，$f(x)=x^3+x^2-2x-1=0$ …⑫とおくと，$a_1=a$ であるから⑪より，$f(a_1)=a^3+a^2-2a-1=0$

$a_2=a^2-2$ であるから，$f(a_2)=(a^2-2)^3+(a^2-2)^2-2(a^2-2)-1=(a^3+a^2-2a-1)(a^3-a^2-2a+1)=0$

⑪より，$a_3=a^3-3a=(-a^2+2a+1)-3a=-a^2-a+1$であるから，

$f(a_3)=(-a^2-a+1)^3+(-a^2-a+1)^2-2(-a^2-a+1)-1=-(a^3+a^2-2a-1)(a^3+2a^2-a-1)=0$

a_1，a_2，a_3は，方程式⑫の3つの解であるから，解と係数の関係により，

$a_1+a_2+a_3=-1$，$a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1=-2$，$a_1a_2a_3=1$ …⑬

次に，$2022=7\times289-1$ であるから，

$$\sum_{k=1}^{2022}\frac{1}{{a_k}^3}=289\left(\frac{1}{{a_1}^3}+\frac{1}{{a_2}^3}+\frac{1}{{a_3}^3}+\frac{1}{{a_4}^3}+\frac{1}{{a_5}^3}+\frac{1}{{a_6}^3}+\frac{1}{{a_7}^3}\right)-\frac{1}{{a_{2023}}^3}$$

$$=289\left(\frac{1}{{a_1}^3}+\frac{1}{{a_2}^3}+\frac{1}{{a_3}^3}+\frac{1}{{a_3}^3}+\frac{1}{{a_2}^3}+\frac{1}{{a_1}^3}+\frac{1}{{a_0}^3}\right)-\frac{1}{{a_0}^3}$$

$$=289\left\{\frac{1}{{a_0}^3}+2\left(\frac{1}{{a_1}^3}+\frac{1}{{a_2}^3}+\frac{1}{{a_3}^3}\right)\right\}-\frac{1}{{a_0}^3}$$

$$=289\left\{\frac{1}{{a_0}^3}+2\cdot\frac{(a_1a_2)^3+(a_2a_3)^3+(a_3a_1)^3-3{a_1}^2{a_2}^2{a_3}^2+3{a_1}^2{a_2}^2{a_3}^2}{(a_1a_2a_3)^3}\right\}-\frac{1}{{a_0}^3}$$

$$=289\left[\frac{1}{{a_0}^3}+2\cdot\frac{(a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1)\{(a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1)^2-3a_1a_2a_3(a_1+a_2+a_3)\}+3(a_1a_2a_3)^2}{(a_1a_2a_3)^3}\right]-\frac{1}{{a_0}^3}$$

ここで，$a_0=2$ で，⑬より，

$$\sum_{k=1}^{2022}\frac{1}{{a_k}^3}=289\left[\frac{1}{2^3}+2\cdot\frac{(-2)\{(-2)^2-3\cdot1(-1)\}+3\cdot1^2}{(1)^3}\right]-\frac{1}{2^3}=-6322$$ 答

補足

$S_p=\sum_{k=1}^{2022}{a_k}^p=289\{{a_0}^p+2({a_1}^p+{a_2}^p+{a_3}^p)\}-{a_0}^p=288\cdot2^p+578({a_1}^p+{a_2}^p+{a_3}^p)=288\cdot2^p+578\cdot t_p$ の値

$f(x)=x^3+x^2-2x-1=0$ の3つの解を a_1，a_2，a_3，$t_p={a_1}^p+{a_2}^p+{a_3}^p$ とおくと，$\dfrac{xf'(x)}{f(x)}=\sum_{p=0}^{\infty}\dfrac{t_p}{x^p}$

$x=\dfrac{1}{y}$ とおくと，$g(y)=y^3+2y^2-y-1=0$ この方程式の3つの解は$\dfrac{1}{a_1}={a_1}^{-1}$，$\dfrac{1}{a_2}={a_2}^{-1}$，$\dfrac{1}{a_3}={a_3}^{-1}$

$t_p={a_1}^{-p}+{a_2}^{-p}+{a_3}^{-p}$ とおくと，$\dfrac{xg'(x)}{g(x)}=\sum_{p=0}^{\infty}\dfrac{t_p}{x^p}$

これを用いて計算すると，

p	S_p	p	S_p
0	2022	0	2022
1	-2	-1	-1012
2	4042	-2	3540
3	-8	-3	-6322
4	12122	-4	15046
5	-32	-5	-32937
6	40396	-6	$\dfrac{149133}{2}$

(2022/1/2　ジョーカー)