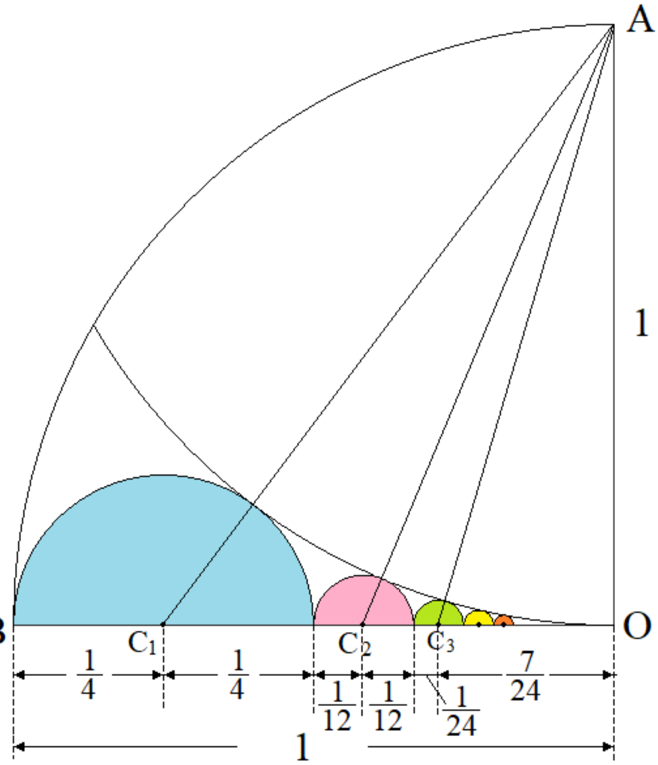
## ● 問題 409 解答＜三角定規＞

［第６問題］

右図のように各点を定める。

円 $C_1$, $C_2$, …の半径を $r_1$, $r_2$, …とする。




△ $OAC_1$ は直角三角形だから

$$(1+r_1)^2=1^2+(1-r_1)^2$$

整理して $4r_1=1$ $\therefore\ r_1=\mathbf{\dfrac{1}{4}}$ …①

△ $OAC_2$ は直角三角形だから

$$(1+r_2)^2=1^2+\left(1-\frac{2}{4}-r_2\right)^2$$

整理して $3r_2=\dfrac{1}{4}$

$$\therefore\ r_1=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}=\mathbf{\frac{1}{1+2}\cdot\frac{1}{4}}\quad\text{…②}$$

△ $OAC_3$ は直角三角形だから

$$(1+r_3)^2=1^2+\left(1-\frac{2}{4}-\frac{2}{12}-r_3\right)^2$$

整理して $6r_3=\dfrac{1}{4}$

$$\therefore\ r_3=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}=\mathbf{\frac{1}{1+2+3}\cdot\frac{1}{4}}\quad\text{…③}$$

①②③より一般に

$$r_n=\frac{1}{1+2+\cdots+n}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2n(n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\quad\text{…④}$$

と類推し，これを数学的帰納法で示す。

①より，④は $n=1$ で成立する。

$n=k$ での成立を仮定すると，

△ $OAC_{k+1}$ は直角三角形だから

$$(1+r_{k+1})^2=1^2+\{1-2(r_1+\cdots+r_k)-r_{k+1}\}^2\quad\text{…⑤}$$

ここで $2(r_1+\cdots+r_k)=\left(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}\right)=1-\dfrac{1}{k+1}$ だから⑤は

$$(1+r_{k+1})^2=1+\left(\frac{1}{k+1}-r_{k+1}\right)^2$$

整理して $\left(1+\dfrac{1}{k+1}\right)r_{k+1}=\dfrac{1}{2(k+1)^2}$ $\therefore\ r_{k+1}=\dfrac{1}{2(k+1)(k+2)}$

これは④が $n=k+1$ で成立することを示している。

以上より

$$r_n=\mathbf{\frac{1}{1+2+\cdots+n}\cdot\frac{1}{4}}$$