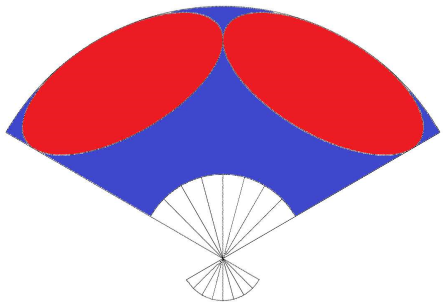
第 410 回

第 1 問題

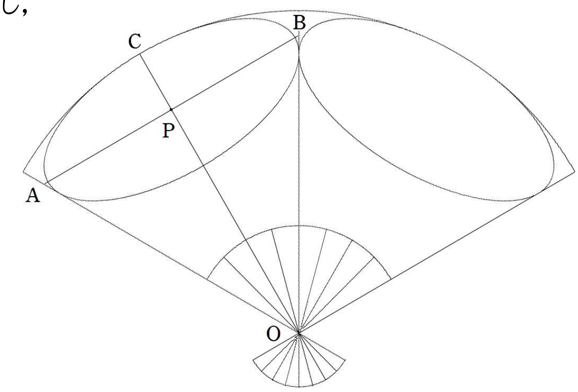
扇面（中心角は 120°）内に 2 個の等しい楕円を容れるとき，
扇長を知って，短軸の最小なものを求めよ。



術文（答）

$$\text{短軸} = \frac{\text{扇長}}{2.5}$$

解答　図のように記号を付けると，OC＝OP＋PC　…①である



楕円 P の長軸を $2a$，短軸を $2b$，扇長を扇の半径（OC）と解釈し，
r とおく。

∠OAB＝60° より，$OP = \sqrt{a^2\tan^2 60^\circ + b^2} = \sqrt{3a^2 + b^2}$

短軸が最小になるとき，曲率円の半径 OC は，　$r = \dfrac{a^2}{b}$　…②

これらを①に代入すると，$\dfrac{a^2}{b} = \sqrt{3a^2+b^2} + b$

分母を払って整理すると，　$a^2 - b^2 = b\sqrt{3a^2+b^2}$

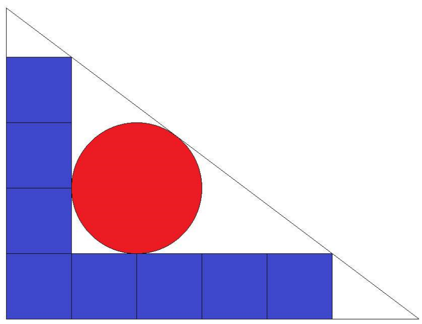
両辺を 2 乗して移項すると，　$a^2(a^2 - 5b^2) = 0$

$a > 0$ より，　$a^2 = 5b^2$

このとき，②より，　$r = \dfrac{5b^5}{b} = 5b$　　$\therefore 2b = \dfrac{2r}{5}$　よって，短軸＝$\dfrac{\text{扇長}}{2.5}$　答

第 2 問題

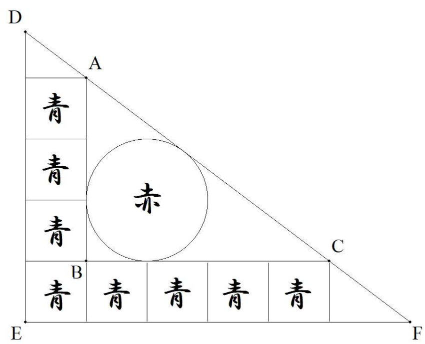
直角三角形内へ相等しい 8 個の正方形を容れ，
それに接する円を描くとき，この円の直径を
求めよ。



術文（答）

円の直径＝2（正方形の 1 辺の長さ）

解答　青正方形の 1 辺を a，円の半径を r とし，図のように記号を付ける。



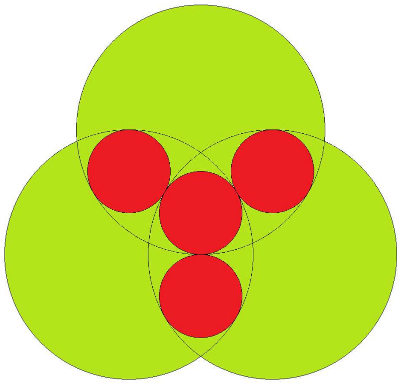
直角三角形ABCの縦 $3a$，横 $4a$ であるから，斜辺は三平方の定理により
AC＝ $5a$

このとき，△ABC の内接円の直径は，$2r = 3a + 4a - 5a = 2a$

よって，円の直径＝2（正方形の1辺の長さ）　答

第３問題

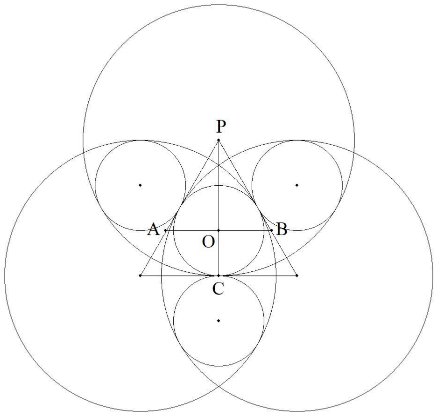
相等しい３個の円（萌黄）が交わり，その間に４個の等しい赤円を容れる。
萌黄円の直径を知って赤円の直径を求めよ。



術文（答）

赤直径＝萌黄直径/３

解答　萌黄円の直径を R，赤円の直径を r とおき，図のように記号を付ける。



△PAB は正三角形になるから，PO$=\sqrt{r^2\tan^2 60^\circ+r^2}=2r$

$R=$PO$+$OC$=2r+r=3r$　$\therefore r=\dfrac{R}{3}$

よって，赤直径＝萌黄直径/３　答

（2022/2/6　ジョーカー）