第 410 回追加問題

$\sin\theta+\dfrac{1}{\sin\theta}=S$，$\cos\theta+\dfrac{1}{\cos\theta}=C$，$\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}=T$ とおく。

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，次の式の値域をそれぞれ求めよ。

(1)　A$=S^2+C^2-2T^2$

(2)　B$=S+C-T$

解答

(1)　$\mathrm{A}=\left(\sin\theta+\dfrac{1}{\sin\theta}\right)^2+\left(\cos\theta+\dfrac{1}{\cos\theta}\right)^2-2\left(\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}\right)^2$

$=\sin^2\theta+2+\dfrac{1}{\sin^2\theta}+\cos^2\theta+2+\dfrac{1}{\cos^2\theta}-2\left(\tan^2\theta+1+1+\dfrac{1}{\tan^2\theta}\right)$

$=5+\dfrac{1}{\sin^2\theta}+\dfrac{1}{\cos^2\theta}-2\left(\dfrac{1}{\cos^2\theta}+\dfrac{1}{\sin^2\theta}\right)$

（$\because\ \sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，$\tan^2\theta+1=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$，$1+\dfrac{1}{\tan^2\theta}=\dfrac{1}{\sin^2\theta}$ ）

$=5-\dfrac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}=5-\dfrac{4}{\sin^2 2\theta}$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$0<2\theta<\pi$ より，$\sin^2 2\theta\leqq 1$ であるから，$\dfrac{4}{\sin^2 2\theta}\geqq 4$，$5-\dfrac{4}{\sin^2 2\theta}\leqq 5-4$

よって，A$\leqq 1$（等号は，$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき）　答

(2)　$\mathrm{B}=\left(\sin\theta+\dfrac{1}{\sin\theta}\right)+\left(\cos\theta+\dfrac{1}{\cos\theta}\right)-\left(\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}\right)$

$=\sin\theta+\cos\theta+\dfrac{\cos\theta+\sin\theta}{\sin\theta\cos\theta}-\dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}$　（$\because\ \tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$，$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ ）

$=\sin\theta+\cos\theta+\dfrac{\sin\theta+\cos\theta-1}{\sin\theta\cos\theta}\times\dfrac{\sin\theta+\cos\theta+1}{\sin\theta+\cos\theta+1}$

$=\sin\theta+\cos\theta+\dfrac{\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta-1}{\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta+1)}=\sin\theta+\cos\theta+\dfrac{2}{\sin\theta+\cos\theta+1}$

ここで，$\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=x$ とおくと，

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}<\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)\leqq 1$ であるから，$1<x\leqq\sqrt{2}$（等号は，$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき）　…①

B$=x+\dfrac{2}{x+1}=f(x)$ とおくと，$f'(x)=1-\dfrac{2}{(x+1)^2}>0$（∵①より）

$f(x)$ は①の範囲で増加関数である。$f(1)=2$，$f(\sqrt{2})=\sqrt{2}+\dfrac{2}{\sqrt{2}+1}=3\sqrt{2}-2$ より，

B$=f(x)$ の値域は，$2<B\leqq 3\sqrt{2}-2$（等号は，$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき）　答

（ジョーカー）