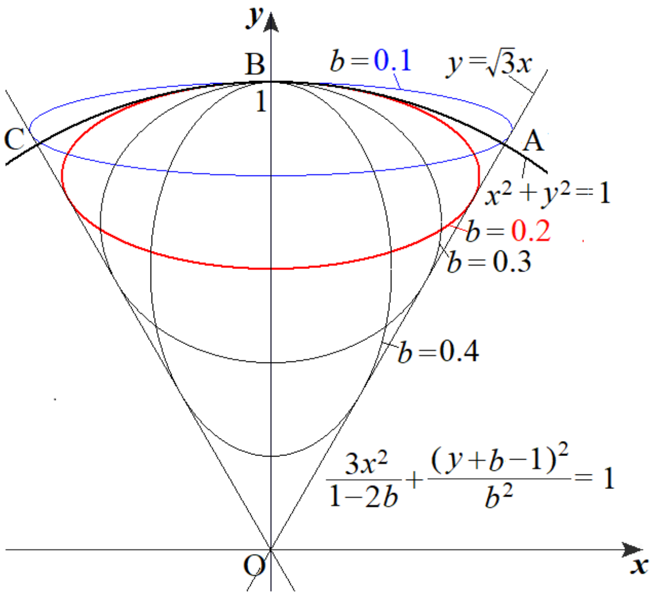
● 問題 410 解答＜三角定規＞

［第１問題］

題意より, 扇形を右図 OAB とする。



内接する楕円は, 半長軸を a,半短軸を b （$a \geqq b > 0$）として

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(y+b-1)^2}{b^2}=1 \quad \cdots①$$

とできる。楕円①は直線

$$y=\sqrt{3}\,x \quad \cdots②$$

に接するから,①②から y を消去した x の方程式

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(\sqrt{3}\,x+b-1)^2}{b^2}=1 \quad \cdots③$$

整理した

$$(3a^2+b^2)x^2+2\sqrt{3}\,a^2(b-1)x-a^2(2b-1)=0 \quad \cdots④$$

は, 重解をもつ。よって，④の判別式

$$D/4=3a^4(b-1)^2+a^2(3a^2+b^2)(2b-1)=\cdots=a^2b^2(3a^2+2b-1)=0$$

$$\therefore\ 3a^2+2b-1=0 \quad \therefore\ a^2=\frac{1-2b}{3} \quad \cdots⑤$$

また，楕円①が扇形に含まれるためには，①の B 点での曲率半径 ρ が円弧 AB の半径 1 以下でなければならない。(*)

別記により　$\rho=\dfrac{a^2}{b}$　であるから⑤より　$\dfrac{1-2b}{3b}\leqq 1$　$\therefore\ b\geqq\dfrac{1}{5}$

以上より，求める短軸の極小値は　$2b=\dfrac{2}{5}=\dfrac{\textbf{扇長}}{\textbf{2.5}}$　…[答]

(別記*)

楕円 $x=a\cos\theta$, $y=b\sin\theta$ 上の点（x, y）での曲率半径 ρ は

$$\rho=\frac{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{3/2}}{\dot{x}\cdot\ddot{y}-\ddot{x}\cdot\dot{y}}$$

$\dot{x}=-a\sin\theta$,　$\ddot{x}=-a\cos\theta$

$\dot{y}=\ b\cos\theta$,　$\ddot{y}=-b\sin\theta$　　より

$$\rho=\frac{(a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta)^{3/2}}{-a\sin\theta(-b\sin\theta)-(-a\cos\theta)b\cos\theta}=\frac{(a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta)^{3/2}}{ab}$$

図の B 点は　$\theta=\dfrac{\pi}{2}$　だから，　$\rho\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{a^3}{ab}=\dfrac{a^2}{b}$