● 追加問題 解答＜三角定規＞

$$S=\sin\theta+\frac{1}{\sin\theta},\quad C=\cos\theta+\frac{1}{\cos\theta},\quad T=\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}$$

(1) $S^2=\sin^2\theta+\dfrac{1}{\sin^2\theta}+2,\quad C^2=\cos^2\theta+\dfrac{1}{\cos^2\theta}+2,\quad T^2=\tan^2\theta+\dfrac{1}{\tan^2\theta}+2$

$$\therefore\ A=S^2+C^2-2T^2=1+\frac{1}{\sin^2\theta}+\frac{1}{\cos^2\theta}-\frac{2\sin^2\theta}{\cos^2\theta}-\frac{2\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$$

ここで $\dfrac{1}{\cos^2\theta}-\dfrac{2\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=\dfrac{2(1-\sin^2\theta)-1}{\cos^2\theta}=\dfrac{2\cos^2\theta-1}{\cos^2\theta}=2-\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

同様に $\dfrac{1}{\sin^2\theta}-\dfrac{2\cos^2\theta}{\sin^2\theta}=2-\dfrac{1}{\sin^2\theta}$

よって，$A=5-\dfrac{1}{\sin^2\theta}-\dfrac{1}{\cos^2\theta}=5-\dfrac{1}{\sin^2\theta\cos^2\theta}=5-\dfrac{4}{\sin^2 2\theta}$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき $0<\sin^2 2\theta\leqq 1$ だから，$1\leqq\dfrac{1}{\sin^2 2\theta}$，$-\dfrac{4}{\sin^2 2\theta}\leqq -4$ $\therefore\ A\leqq 1$

また，$\theta\to 0$，$\theta\to\dfrac{\pi}{2}$ で $\dfrac{1}{\sin^2 2\theta}\to\infty$ だから，求める A の値域は $\boldsymbol{-\infty<A\leqq 1}$ …[答]

(2) $B=S+C-T=\sin\theta+\dfrac{1}{\sin\theta}+\cos\theta+\dfrac{1}{\cos\theta}-\tan\theta-\dfrac{1}{\tan\theta}$ …①

$B'=\dfrac{dB}{d\theta}=\cos\theta-\dfrac{\cos\theta}{\sin^2\theta}-\sin\theta+\dfrac{\sin\theta}{\cos^2\theta}-\dfrac{1}{\cos^2\theta}+\dfrac{1}{\sin^2\theta}$ …②

②の第 2, 6 項$=\dfrac{1-\cos\theta}{\sin^2\theta}=\dfrac{1-\cos\theta}{1-\cos^2\theta}=\dfrac{1}{1+\cos\theta}$ …③

②の第 3, 4 項$=-\dfrac{1-\sin\theta}{\cos^2\theta}=-\dfrac{1-\sin\theta}{1-\sin^2\theta}=-\dfrac{1}{1+\sin\theta}$ …④

$\therefore$ ②$=\cos\theta-\sin\theta+\dfrac{1}{1+\cos\theta}-\dfrac{1}{1+\sin\theta}=(\cos\theta-\sin\theta)\left\{1-\dfrac{1}{(1+\cos\theta)(1+\sin\theta)}\right\}$ …⑤

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき $0<\sin\theta,\ \cos\theta$ だから ⑤の｛ ｝>0

よって，⑤の正負は $\cos\theta-\sin\theta$ の正負で決まる。

以上より，$0<\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}$ のとき $B'\geqq 0$ ← B は単調増加,

$\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき $B'\leqq 0$ ← B は単調減少。

また，$\theta\to 0$ のとき $\dfrac{1}{\sin\theta}-\dfrac{1}{\tan\theta}=\dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}=\dfrac{2\sin^2(\theta/2)}{2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)}=\tan\dfrac{\theta}{2}\to 0$ $\therefore\ B\to 2$

$\theta\to\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\phi=\dfrac{\pi}{2}-\theta$ とおけば $\phi\to 0$ で，$\dfrac{1}{\cos\theta}-\dfrac{1}{\tan\theta}=\dfrac{1}{\sin\phi}-\dfrac{\cos\phi}{\sin\phi}=\tan\dfrac{\phi}{2}\to 0$ $\therefore\ B\to 2$

$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき，$B=3\sqrt{2}-2$

以上より，求める B の値域は $\boldsymbol{2<B\leqq 3\sqrt{2}-2}$ …[答]