第 411 回追加問題

(1)　方程式 $x^3-3x+1=0$ を $x=r\cos\theta$ （$r>0$，$0\leqq\theta\leqq\pi$ ）とおいて解け。

(2)　$y=x^3-3x+1$ と x 軸によって囲まれた部分の面積の和は $\dfrac{9\sqrt{3}}{2}\sin\dfrac{2\pi}{9}$ と表されることを示せ。

解答

(1)　$x=r\cos\theta$ （$r>0$，$0\leqq\theta\leqq\pi$ ）を代入すると，$r^3\cos^3\theta-3r\cos\theta+1=0$

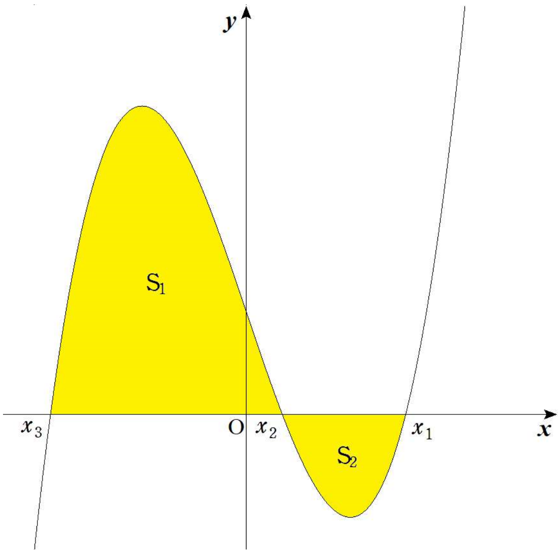
3 倍角の公式 $\cos3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$ が適用できるように r を定める。

$r^3:(-3r)=4:(-3)$ より，$r=2$

このとき，$\cos3\theta=-\dfrac{1}{2}$ より，$3\theta=\dfrac{2\pi}{3}$，$2\pi\pm\dfrac{2\pi}{3}$　$\therefore\ \theta=\dfrac{2\pi}{9}$，$\dfrac{4\pi}{9}$，$\dfrac{8\pi}{9}$

よって，$x=2\cos\dfrac{2\pi}{9}$，$2\cos\dfrac{4\pi}{9}$，$2\cos\dfrac{8\pi}{9}$　答

(2)　$x_1=2\cos\dfrac{2\pi}{9}$，$x_2=2\cos\dfrac{4\pi}{9}$，$x_3=2\cos\dfrac{8\pi}{9}$ とおく。



右図において，求める面積 S は，$S=S_1+S_2$ である。

$$S_1=\int_{x_3}^{x_2}(x^3-3x+1)dx=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2+x\right]_{x_3}^{x_2}$$

$$=\frac{1}{4}({x_2}^4-{x_3}^4)-\frac{3}{2}({x_2}^2-{x_3}^2)+(x_2-x_3)$$

$$=\frac{1}{4}(x_2-x_3)\{(x_2+x_3)^3-2x_2x_3(x_2+x_3)-6(x_2+x_3)+4\}$$

解と係数の関係により，$x_2+x_3=-x_1$，$x_2x_3=-\dfrac{1}{x_1}$

また，${x_1}^3-3x_1+1=0$ であるから，

$$S_1=\frac{1}{4}(x_2-x_3)(-{x_1}^3-2+6x_1+4)=\frac{3}{4}(x_2-x_3)(x_1+1)$$

同様に，$S_2=-\displaystyle\int_{x_2}^{x_1}(x^3-3x+1)dx=-\dfrac{3}{4}(x_1-x_2)(x_3+1)$

ここで，

$x_2-x_3=2\left(\cos\dfrac{4\pi}{9}-\cos\dfrac{8\pi}{9}\right)=2\sqrt{3}\sin\dfrac{2\pi}{9}$，$x_1-x_2=2\left(\cos\dfrac{2\pi}{9}-\cos\dfrac{4\pi}{9}\right)=2\sqrt{3}\sin\dfrac{\pi}{9}$ であるから，

$$S_1=\frac{3}{4}\cdot2\sqrt{3}\sin\frac{2\pi}{9}\cdot\left(2\cos\frac{2\pi}{9}+1\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}\left(\sin\frac{4\pi}{9}+\sin\frac{2\pi}{9}\right)=\frac{9}{2}\cos\frac{\pi}{9}$$

$$S_2=-\frac{3}{4}\cdot2\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{9}\cdot\left(2\cos\frac{8\pi}{9}+1\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}\left(\sin\frac{2\pi}{9}-\sin\frac{\pi}{9}\right)=\frac{9}{2}\cos\frac{4\pi}{9}$$

よって，$S=S_1+S_2=\dfrac{9}{2}\cos\dfrac{\pi}{9}+\dfrac{9}{2}\cos\dfrac{4\pi}{9}=\dfrac{9\sqrt{3}}{2}\cos\dfrac{5\pi}{18}=\dfrac{9\sqrt{3}}{2}\sin\dfrac{2\pi}{9}$　終

補足　S の近似値は，5.01003

（2022/3/6　ジョーカー）