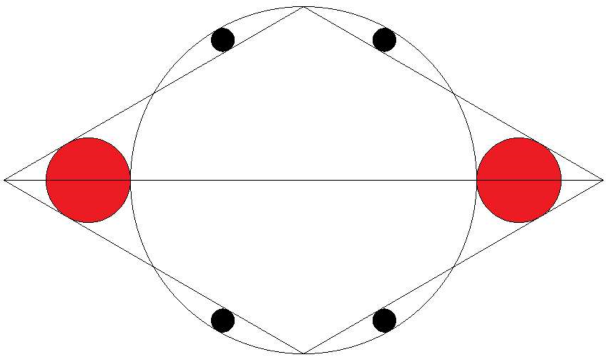
第 412 回　大垣八幡宮奉納算額

第 7 問題

1つの内角が60°　の菱形に赤円2個と黒円4個を容れる。

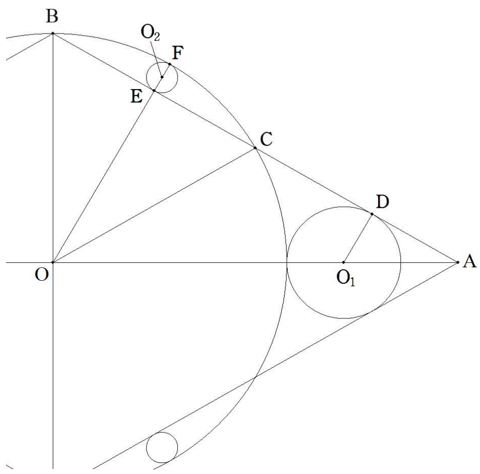
黒円の直径を知って赤円の直径を求めよ。



術文（答）

赤径＝$\dfrac{4(1+\sqrt{3})}{3}$ 黒径

解答　図形の 4 分の 1 について，右図のように記号を付ける。



仮定より，∠OAB＝30° である。

OB＝ a とおくと，OA＝ $\sqrt{3}a$

赤円，黒円をそれぞれ $O_1(r_1)$，$O_2(r_2)$ とおく。

△O_1AD の 3 辺の比は，$1:2:\sqrt{3}$ であるから，$O_1A=2r_1$ より，

OA＝ $a+r_1+2r_1=\sqrt{3}a$ より，$r_1=\dfrac{\sqrt{3}-1}{3}a$　…①

次に，△BOE の 3 辺の比は，$1:2:\sqrt{3}$ であるから，OE＝ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$

また，OE＝OF－EF＝ $a-2r_2$ より，

$\dfrac{\sqrt{3}}{2}a=a-2r_2$　$\therefore a=4(2+\sqrt{3})r_2$

これを①に代入すると，$r_1=\dfrac{\sqrt{3}-1}{3}\cdot 4(2+\sqrt{3})r_2=\dfrac{4(1+\sqrt{3})}{3}r_2$

よって，両辺に 2 を掛けると，赤径＝ $\dfrac{4(1+\sqrt{3})}{3}$ 黒径　答

第 8 問題

5 個の等しい正方形，黄 4 個と紫 1 個を描いて，

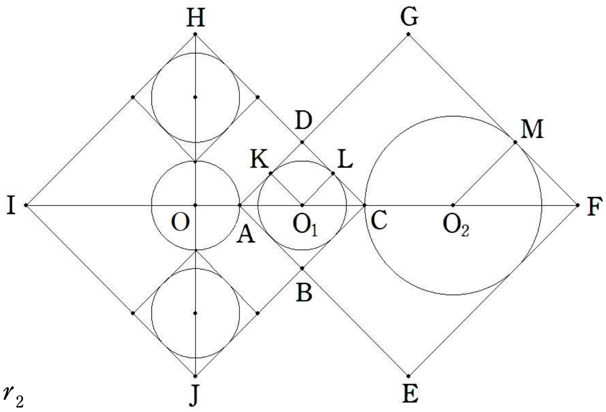
その内に青円 1 個と赤円 5 個を容れる。

青円の直径を知って赤円の直径を求めよ。

術文（答）

赤円径＝青円径/ 2

解答　与えられた図形は，中央の赤円の中心 O を通る垂直な直線に関してに上下左右に対称であるから，右図のようにその 4 分の 1 の部分に記号を付けて考える。



右図で，赤円を $O(r_1)$，$O_1(r_1)$，青円を $O_2(r_2)$ とおく。

$\triangle KAO_1$，$\triangle LO_1C$，$\triangle MO_2F$ は直角二等辺三角形であるから，3 辺の比は $1:1:\sqrt{2}$ である。

$OC = r_1+\sqrt{2}r_1+\sqrt{2}r_1 = (1+2\sqrt{2})r_1$

$AF = \sqrt{2}r_1+\sqrt{2}r_1+r_2+\sqrt{2}r_2 = 2\sqrt{2}r_1+(1+\sqrt{2})r_2$

$2OC = AF$ であるから，$2\cdot(1+2\sqrt{2})r_1 = 2\sqrt{2}r_1+(1+\sqrt{2})r_2$

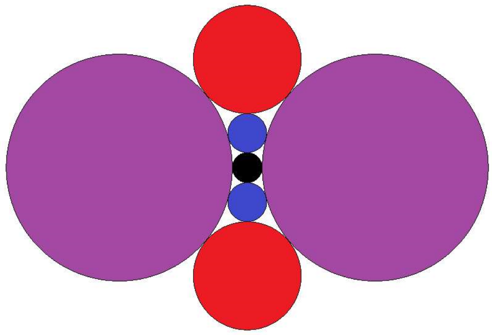
整理すると，$2(1+\sqrt{2})r_1 = (1+\sqrt{2})r_2 \quad \therefore r_1 = \dfrac{r_2}{2}$

よって，赤円径＝青円径/ 2　答

第 9 問題

紫円 2 個と赤円 2 個で青円 2 個と黒円を囲む。

青円，黒円の直径を知って赤円の直径を求めよ。

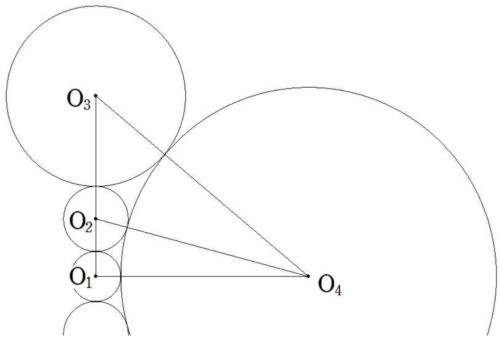


術文（答）

$\dfrac{\text{黒径}}{\text{青径}} = \text{極}$ とすると，赤径$= \dfrac{\text{青径}}{\text{極}(1+\text{極})-1}$

解答

黒，青，赤，紫円をそれぞれ $O_1(r_1)$，$O_2(r_2)$，$O_3(r_3)$，$O_4(r_4)$ とおく。



$\triangle O_1O_2O_4$ に三平方の定理を適用すると，

$(r_1+r_2)^2+(r_1+r_4)^2=(r_2+r_4)^2 \quad \cdots①$

$\triangle O_1O_3O_4$ に三平方の定理を適用すると，

$(r_1+2r_2+r_3)^2+(r_1+r_4)^2=(r_3+r_4)^2 \quad \cdots②$

②−①より，$r_1r_2+2r_2{}^2+r_1r_3+2r_2r_3+r_2r_4-r_3r_4=0$

r_4 について解くと，$r_4 = \dfrac{r_1r_2+2r^2+r_1r_3+2r_2r_3}{r_3-r_2}$

これを①に代入して整理すると，$-r_2{}^3+r_1{}^2r_3+r_1r_2r_3-r_2{}^2r_3=0$

r_3 について解くと，$r_3 = \dfrac{r_2{}^3}{r_1{}^2+r_1r_2-r_2{}^2} = \dfrac{r_2}{\dfrac{r_1}{r_2}\left(\dfrac{r_1}{r_2}+1\right)-1}$

両辺に 2 を掛けると，$2r_3 = \dfrac{2r_2}{\dfrac{2r_1}{2r_2}\left(\dfrac{2r_1}{2r_2}+1\right)-1}$

よって，黒径/青径＝極とすると，赤径＝青径/{極(極＋1)−1}　答

（2022/4/3　ジョーカー）