

第 412 回 探求問題

何チームかでリーグ戦を行うとき、勝敗の分かれ方は何通りあるか。ただし、各試合で引き分けはなく、また、チームに区別はつけないとする。例えば、3 チームのとき、2 勝、1 勝 1 敗、2 敗、3 チームとも 1 勝 1 敗の 2 通りです。ここで、参加チーム数を n ($n \geq 2$)、また 1 つの順位表を各チームの勝敗の大きい順に () で区切ったもので表すことにする。すると、

2 チームのときは (1, 0) の 1 通り

3 チームのときは (2, 1, 0), (1, 1, 1) の 2 通り

4 チームのときは (3, 2, 1, 0), (3, 1, 1, 1), (2, 2, 2, 0), (2, 2, 1, 1) の 4 通りとなる。

それでは、チーム数を多くしたときはどうなるか探求ください。

解答 参加チーム数が n ($n \geq 2$) のときの勝敗の分かれ方の数を a_n で表す。 $a_2=1$, $a_3=2$, $a_4=4$ である。

チーム数が n のとき、各順位表の勝数について次のことが成り立つ。

[1] 勝数の合計は総試合数だから、 ${}_nC_2 = \frac{n(n-1)}{2}$

[2] 勝数の最大値は各チームの試合数だから、 $n-1$

[3] 全勝 (勝数 $n-1$) は 1 チームのみ。

また、全勝のチームがあるとき、それ以外の $n-1$ チームの間の勝数についても同様。

例えば、 $(n-1, \boxed{n-2}, \boxed{n-2}, \dots), (n-1, n-2, \boxed{n-3}, \boxed{n-3}, \dots)$ などはない。

[4] 勝数 0 (全敗) は 1 チームのみ。

また、全敗のチームがあるとき、それ以外の $n-1$ チームの間の勝数についても同様。

例えば、 $(\dots, \boxed{1}, \boxed{1}, 0), (\dots, \boxed{2}, \boxed{2}, 1, 0), \dots$ などはない。

これらの条件を満たす組合せを機械的に書き出すと、

(1) 5 チームのときの順位表

(4,3,2,1,0) (3,3,3,1,0) (2,2,2,2,2)

(4,3,1,1,1) (3,3,2,2,0)

(4,2,2,2,0) (3,3,2,1,1)

(4,2,2,1,1) (3,2,2,2,1) $\therefore a_5 = 9$ (通り)

(2) 6 チームのときの順位表

(5,4,3,2,1,0) (4,4,4,2,1,0) (3,3,3,3,3,0)

(5,4,3,1,1,1) (4,4,4,1,1,1) (3,3,3,3,2,1)

(5,4,2,2,2,0) (4,4,3,3,1,0) (3,3,3,2,2,2)

(5,4,2,2,1,1) (4,4,3,2,2,0)

(5,3,3,3,1,0) (4,4,3,2,1,1)

(5,3,3,2,2,0) (4,4,2,2,2,1)

(5,3,3,2,1,1) (4,3,3,3,2,0)

(5,3,2,2,2,1) (4,3,3,3,1,1)

(5,2,2,2,2,2) (4,3,3,2,2,1)

(4,3,2,2,2,2) $\therefore a_6 = 22$ (通り)

(3) 7 チームのときの順位表

(6,5,4,3,2,1,0)	(5,5,5,3,2,1,0)	(4,4,4,4,4,1,0)	(3,3,3,3,3,3,3)
(6,5,4,3,1,1,1)	(5,5,5,3,1,1,1)	(4,4,4,4,3,2,0)	
(6,5,4,2,2,2,0)	(5,5,5,2,2,2,0)	(4,4,4,4,3,1,1)	
(6,5,4,2,2,1,1)	(5,5,5,2,2,1,1)	(4,4,4,4,2,2,1)	
(6,5,3,3,3,1,0)	(5,5,4,4,2,1,0)	(4,4,4,3,3,3,0)	
(6,5,3,3,2,2,0)	(5,5,4,4,1,1,1)	(4,4,4,3,3,2,1)	
(6,5,3,3,2,1,1)	(5,5,4,3,3,1,0)	(4,4,4,3,2,2,2)	
(6,5,3,2,2,2,1)	(5,5,4,3,2,2,0)	(4,4,3,3,3,3,1)	
(6,5,2,2,2,2,2)	(5,5,4,3,2,1,1)	(4,4,3,3,3,2,2)	
(6,4,4,4,2,1,0)	(5,5,4,2,2,2,1)	(4,3,3,3,3,3,2)	
(6,4,4,4,1,1,1)	(5,5,3,3,3,2,0)		
(6,4,4,3,3,1,0)	(5,5,3,3,3,1,1)		
(6,4,4,3,2,2,0)	(5,5,3,3,2,2,1)		
(6,4,4,3,2,1,1)	(5,5,3,2,2,2,2)		
(6,4,4,2,2,2,1)	(5,4,4,4,3,1,0)		
(6,4,3,3,3,2,0)	(5,4,4,4,2,2,0)		
(6,4,3,3,3,1,1)	(5,4,4,4,2,1,1)		
(6,4,3,3,2,2,1)	(5,4,4,3,3,2,0)		
(6,4,3,2,2,2,2)	(5,4,4,3,3,1,1)		
(6,3,3,3,3,3,0)	(5,4,4,3,2,2,1)		
(6,3,3,3,3,2,1)	(5,4,4,2,2,2,2)		
(6,3,3,3,2,2,2)	(5,4,3,3,3,3,0)		
	(5,4,3,3,3,2,1)		
	(5,4,3,3,2,2,2)		
	(5,3,3,3,3,3,1)		
	(5,3,3,3,3,2,2)	$\therefore a_7 = 59$ (通り)	

補足 例えば $n = 6, 7$ の場合を比べてみる。

$n = 7$ の 1 列目は, $(6,5,4,3,2,1,0)$ から始まり, $l_6 = 9$ 通りある。

$n = 7$ の 2 列目は, 5 勝が 3 チームから始まる。 $(5,5,5,3,2,1,0), \dots$

$n = 7$ の 3 列目は, 4 勝が 5 チームから始まる。 $(4,4,4,4,4,1,0), \dots$

最後は, $(3,3,3,3,3,3,3)$ である。

[5] 一般に, チーム数 n の順位表を (1), (2), (3) のように並べると,

① 1 列目は, $(\overline{n-1}, n-2, \dots, 1, 0)$ から始まり, a_{n-1} 通りある。

② 2 列目は, $(\overline{n-2}, \overline{n-2}, \overline{n-2}, \dots, 1, 0)$ から始まる。

③ 3 列目は, $(\overline{n-3}, \overline{n-3}, \overline{n-3}, \overline{n-3}, \overline{n-3}, \dots, 1, 0)$ から始まる。

※括弧内の勝数の最大値は列順に 1, 3, 5, ... と奇数個。

④ 最後は、括弧内に、 n が奇数のとき、 $\frac{n-1}{2}$ が n 個並び、 n が偶数のとき、 $\frac{n}{2}$ が $\frac{n}{2}$ 個、 $\frac{n}{2}-1$ が $\frac{n}{2}$ 個並ぶ。

以上を踏まえて、8 チームの場合を以下に列記する。

(4) 8 チームのときの順位表

(7,6,5,4,3,2,1,0)	(6,6,6,4,3,2,1,0)	(5,5,5,5,5,2,1,0)	(4,4,4,4,4,4,4,0)
(7,6,5,4,3,1,1,1)	(6,6,6,4,3,1,1,1)	(5,5,5,5,5,1,1,1)	(4,4,4,4,4,4,3,1)
(7,6,5,4,2,2,2,0)	(6,6,6,4,2,2,2,0)	(5,5,5,5,4,3,1,0)	(4,4,4,4,4,4,2,2)
(7,6,5,4,2,2,1,1)	(6,6,6,4,2,2,1,1)	(5,5,5,5,4,2,2,0)	(4,4,4,4,4,3,3,2)
(7,6,5,3,3,3,1,0)	(6,6,6,3,3,3,1,0)	(5,5,5,5,4,2,1,1)	(4,4,4,4,3,3,3,3)
(7,6,5,3,3,2,2,0)	(6,6,6,3,3,2,2,0)	(5,5,5,5,3,3,2,0)	
(7,6,5,3,3,2,1,1)	(6,6,6,3,3,2,1,1)	(5,5,5,5,3,3,1,1)	
(7,6,5,3,2,2,2,1)	(6,6,6,3,2,2,2,1)	(5,5,5,5,3,2,2,1)	
(7,6,5,2,2,2,2,2)	(6,6,6,2,2,2,2,2)	(5,5,5,5,2,2,2,2)	
(7,6,4,4,4,2,1,0)	(6,6,5,5,3,2,1,0)	(5,5,5,4,4,4,1,0)	
(7,6,4,4,4,1,1,1)	(6,6,5,5,3,1,1,1)	(5,5,5,4,4,3,2,0)	
(7,6,4,4,3,3,1,0)	(6,6,5,5,2,2,2,0)	(5,5,5,4,4,3,1,1)	
(7,6,4,4,3,2,2,0)	(6,6,5,5,2,2,1,1)	(5,5,5,4,4,2,2,1)	
(7,6,4,4,3,2,1,1)	(6,6,5,4,4,2,1,0)	(5,5,5,4,3,3,3,0)	
(7,6,4,4,2,2,2,1)	(6,6,5,4,4,1,1,1)	(5,5,5,4,3,3,2,1)	
(7,6,4,3,3,3,2,0)	(6,6,5,4,3,3,1,0)	(5,5,5,4,3,2,2,2)	
(7,6,4,3,3,3,1,1)	(6,6,5,4,3,2,2,0)	(5,5,5,3,3,3,3,1)	
(7,6,4,3,3,2,2,1)	(6,6,5,4,3,2,1,1)	(5,5,5,3,3,3,2,2)	
(7,6,4,3,2,2,2,2)	(6,6,5,4,2,2,2,1)	(5,5,4,4,4,4,2,0)	
(7,6,3,3,3,3,3,0)	(6,6,5,3,3,3,2,0)	(5,5,4,4,4,4,1,1)	
(7,6,3,3,3,3,2,1)	(6,6,5,3,3,3,1,1)	(5,5,4,4,4,3,3,0)	
(7,6,3,3,3,2,2,2)	(6,6,5,3,3,2,2,1)	(5,5,4,4,4,3,2,1)	
(7,5,5,5,3,2,1,0)	(6,6,5,3,2,2,2,2)	(5,5,4,4,4,2,2,2)	
(7,5,5,5,3,1,1,1)	(6,6,4,4,4,3,1,0)	(5,5,4,4,3,3,3,1)	
(7,5,5,5,2,2,2,0)	(6,6,4,4,4,2,2,0)	(5,5,4,4,3,3,2,2)	
(7,5,5,5,2,2,1,1)	(6,6,4,4,4,2,1,1)	(5,5,4,3,3,3,3,2)	
(7,5,5,4,4,2,1,0)	(6,6,4,4,3,3,2,0)	(5,5,3,3,3,3,3,3)	
(7,5,5,4,4,1,1,1)	(6,6,4,4,3,3,1,1)	(5,4,4,4,4,4,3,0)	
(7,5,5,4,3,3,1,0)	(6,6,4,4,3,2,2,1)	(5,4,4,4,4,4,2,1)	
(7,5,5,4,3,2,2,0)	(6,6,4,4,2,2,2,2)	(5,4,4,4,4,3,3,1)	
(7,5,5,4,3,2,1,1)	(6,6,4,3,3,3,3,0)	(5,4,4,4,4,3,2,2)	

(7,5,5,4,2,2,2,1) (6,6,4,3,3,3,2,1) (5,4,4,4,3,3,3,2)
 (7,5,5,3,3,3,2,0) (6,6,4,3,3,2,2,2) (5,4,4,3,3,3,3,3)
 (7,5,5,3,3,3,1,1) (6,6,3,3,3,3,3,1)
 (7,5,5,3,3,2,2,1) (6,6,3,3,3,3,2,2)
 (7,5,5,3,2,2,2,2) (6,5,5,5,4,2,1,0)
 (7,5,4,4,4,3,1,0) (6,5,5,5,4,1,1,1)
 (7,5,4,4,4,2,2,0) (6,5,5,5,3,3,1,0)
 (7,5,4,4,4,2,1,1) (6,5,5,5,3,2,2,0)
 (7,5,4,4,3,3,2,0) (6,5,5,5,3,2,1,1)
 (7,5,4,4,3,3,1,1) (6,5,5,5,2,2,2,1)
 (7,5,4,4,3,2,2,1) (6,5,5,4,4,3,1,0)
 (7,5,4,4,2,2,2,2) (6,5,5,4,4,2,2,0)
 (7,5,4,3,3,3,3,0) (6,5,5,4,4,2,1,1)
 (7,5,4,3,3,3,2,1) (6,5,5,4,3,3,2,0)
 (7,5,4,3,3,2,2,2) (6,5,5,4,3,3,1,1)
 (7,5,3,3,3,3,3,1) (6,5,5,4,3,2,2,1)
 (7,5,3,3,3,3,2,2) (6,5,5,4,2,2,2,2)
 (7,4,4,4,4,4,1,0) (6,5,5,3,3,3,3,0)
 (7,4,4,4,4,3,2,0) (6,5,5,3,3,3,2,1)
 (7,4,4,4,4,3,1,1) (6,5,5,3,3,2,2,2)
 (7,4,4,4,4,2,2,1) (6,5,4,4,4,4,1,0)
 (7,4,4,4,3,3,3,0) (6,5,4,4,4,3,2,0)
 (7,4,4,4,3,3,2,1) (6,5,4,4,4,3,1,1)
 (7,4,4,4,3,2,2,2) (6,5,4,4,4,2,2,1)
 (7,4,4,3,3,3,3,1) (6,5,4,4,3,3,3,0)
 (7,4,4,3,3,3,2,2) (6,5,4,4,3,3,2,1)
 (7,4,3,3,3,3,3,2) (6,5,4,4,3,2,2,2)
 (7,3,3,3,3,3,3,3) (6,5,4,3,3,3,3,1)
 (6,5,4,3,3,3,2,2)
 (6,5,3,3,3,3,3,2)
 (6,4,4,4,4,4,2,0)
 (6,4,4,4,4,4,1,1)
 (6,4,4,4,4,3,3,0)
 (6,4,4,4,4,3,2,1)
 (6,4,4,4,4,2,2,2)

(6,4,4,4,3,3,3,1)

(6,4,4,4,3,3,2,2)

(6,4,4,3,3,3,3,2)

(6,4,3,3,3,3,3,3)

$\therefore a_8 = 167$ (通り)

【参考文献】

- [1] 数学ランド・おもしろ探検, 寺田文行監修, 教材探検の会編, 森北出版, 1997, 第6章 リーグ戦の順位表
[2] <https://oeis.org/A000571> に n チームのリーグ戦で可能な異なるスコアシーケンスの数が掲載されている。

n	$a(n)$
2	1
3	2
4	4
5	9
6	22
7	59
8	167
9	490
10	1486
11	4639
12	14805
13	48107
14	158808
15	531469
16	1799659
17	6157068
18	21258104
19	73996100
20	259451116
21	915695102
22	3251073303
23	11605141649
24	41631194766
25	150021775417
26	542875459724
27	1972050156181
28	7189259574618
29	26295934251565
30	96478910768821
31	354998461378719
32	1309755903513481

(2022/4/25 ジョーカー)