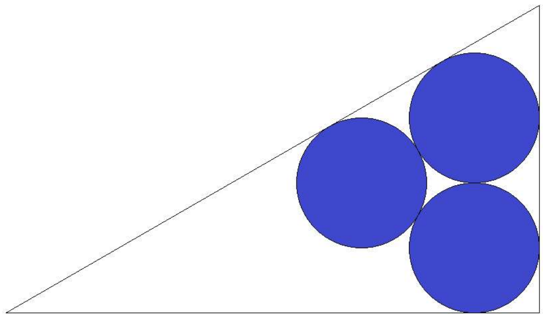
第413回　大垣八幡宮奉納算額

第10問題

直角三角形内に互いに外接する3個の等しい青円を容れる。

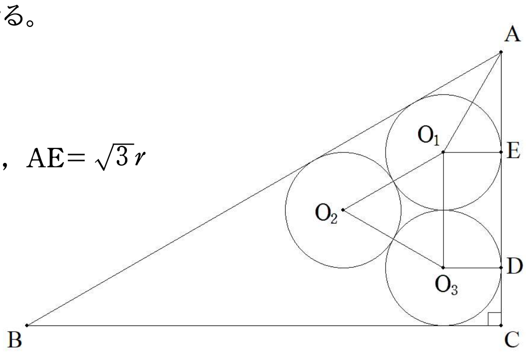
青円の直径を知って直角三角形の直角をはさむ長い方の一辺の長さを求めよ。



術文（答）

一辺の長さ$=(\sqrt{6.75}+1.5)\cdot$青円径

解答　図のように記号を付ける。



青円の中心 O_1 O_2 O_3 は正三角形の頂点をなすから，$\angle CAB=60°$ となる。

（$\because O_1O_2 /\!/ AB$，$O_1O_3 /\!/ AC$）

$\triangle ABC$ の3辺の比は $1:2:\sqrt{3}$ である。

青円の半径を r とすると，$\triangle AO_1E$ の3辺の比は $1:2:\sqrt{3}$ であるから，$AE=\sqrt{3}r$

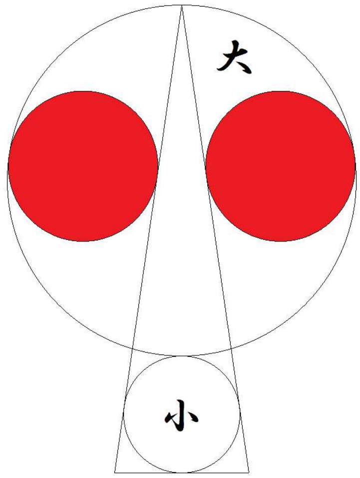
$AC=AE+ED+DC=\sqrt{3}r+2r+r=(3+\sqrt{3})r$

$BC=\sqrt{3}\,AC=\sqrt{3}(3+\sqrt{3})r=\dfrac{3\sqrt{3}+3}{2}\cdot 2r=(\sqrt{6.75}+1.5)\cdot 2r$

よって，$BC>AC$ であるから，

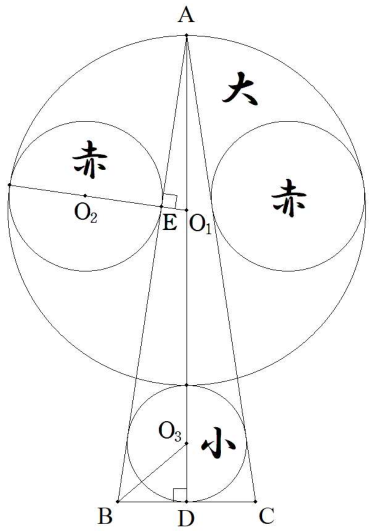
長い方の一辺の長さ$=(\sqrt{6.75}+1.5)\cdot$青円径　答

第 11 問題
二等辺三角形の頂点を通る大円に内接して，
三角形の辺に外接する赤円と二等辺三角形に
内接して大円に外接する小円がある。
大円と赤円の直径を知って小円の直径を求め
よ。



術文（答）

$$\text{小円径} = \frac{(\text{大円径})^2}{\text{赤径}} - 2(\text{大円径})$$



解答　図のように記号を付け，大円，赤円左，小円をそれぞれ

$O_1(r_1)$，$O_2(r_2)$，$O_3(r_3)$ とおく。

$\triangle AO_1E$ について，$AO_1 = r_1$，$O_1E = r_1 - 2r_2$ であるから，三平方の定理により，

$AE = \sqrt{r_1^2 - (r_1 - 2r_2)^2} = 2\sqrt{r_2(r_1 - r_2)}$

また，$\angle AO_1E = \angle ABD = B$ より，$\cos B = \dfrac{r_1 - 2r_2}{r_1}$

$\triangle O_3BD$ について，

$$BD = \frac{r_3}{\tan\frac{B}{2}} = r_3\sqrt{\frac{1+\cos B}{1-\cos B}} = r_3\sqrt{\frac{1+\frac{r_1-2r_2}{r_1}}{1-\frac{r_1-2r_2}{r_1}}} = r_3\sqrt{\frac{r_1 - r_2}{r_2}}$$

$\triangle AO_1E \backsim \triangle ABD$ であるから，$AE:AD = O_1E:BD$ より，

$2\sqrt{r_2(r_1-r_2)} : 2(r_1+r_3) = (r_1-2r_2) : r_3\sqrt{\dfrac{r_1-r_2}{r_2}}$　　$2(r_1+r_3)\cdot(r_1-2r_2) = 2\sqrt{r_2(r_1-r_2)}\cdot r_3\sqrt{\dfrac{r_1-r_2}{r_2}}$

$(r_1+r_3)(r_1-2r_2) = r_3(r_1-r_2)$

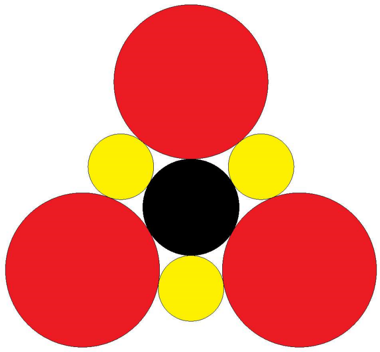
r_3 について解くと，$r_3 = \dfrac{r_1(r_1-2r_2)}{r_2} = \dfrac{r_1^2}{r_2} - 2r_1$

両辺に 2 を掛けると，$2r_3 = \dfrac{(2r_1)^2}{2r_2} - 2\cdot 2r_1$　よって，$\text{小円径} = \dfrac{(\text{大円径})^2}{\text{赤径}} - 2(\text{大円径})$　答

補足　$AB = \dfrac{r_1^2}{r_2}\sqrt{\dfrac{r_1-r_2}{r_2}}$，$BC = \dfrac{2r_1(r_1-2r_2)}{r_2}\sqrt{\dfrac{r_1-r_2}{r_2}}$

第 12 問題

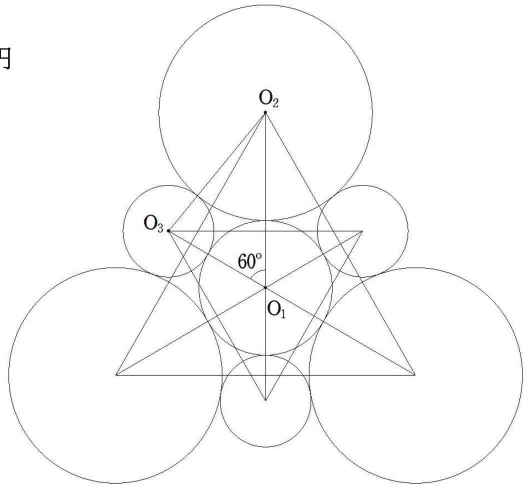
黒円に外接する 3 個の赤円に 3 個の黄円が外接している。
赤円と黒円の直径を知って黄円の直径を求めよ。



術文（答）

$$\text{黄円径} = \frac{\text{赤径} + \text{黒径}}{\dfrac{3\,\text{赤径}}{\text{黄径}} - 1}$$

解答　黒円，赤円，黄円をそれぞれ $O_1\,(r_1)$，$O_2\,(r_2)$，$O_3\,(r_3)$ とする。
右図に示すように，3 個の赤円の中心を頂点にもつ三角形と 3 個の黄円の中心を頂点にもつ三角形は正三角形になるから，$\angle O_3O_1O_2 = 60°$ となる。



$\triangle O_1O_2O_3$ に余弦定理を適用すると，

$$(r_2+r_3)^2 = (r_3+r_1)^2 + (r_1+r_2)^2 - 2(r_3+r_1)(r_1+r_2)\cos 60°$$

$\cos 60° = \dfrac{1}{2}$ を代入して，r_3 について解くと，

$$r_3 = \frac{r_1(r_1+r_2)}{3r_2 - r_1} = \frac{r_2+r_1}{\dfrac{3r_2}{r_1} - 1}$$

両辺に 2 を掛けると，$\text{黄円径} = \dfrac{\text{赤径} + \text{黒径}}{\dfrac{3\,\text{赤径}}{\text{黒径}} - 1}$　答

注意　術文（答）の分母にある黄円は黒円の印刷ミスである。

術文（答）

$$\text{黄円径} = \frac{\text{赤径} + \text{黒径}}{\dfrac{3\,\text{赤径}}{\text{黒径}} - 1}$$

（2022/5/1　ジョーカー）