第 413 回追加問題

x についての方程式 $(a+b^2)x^3+(2b+c)x^2+6x+2a-c=0$ （a，b，c は実数）の解が $x=1$ だけのとき，a，b，c の値を求めよ。

$\boxed{\text{解答}}$ $(a+b^2)x^3+(2b+c)x^2+6x+2a-c=0$ …①とおく。

(1) $a+b^2\fallingdotseq 0$ のとき，①は $(x-1)^3=x^3-3x^2+3x-1=0$ と同値。

x についての各項の係数を比較して，$a+b^2=2$，$2b+c=-6$，$2a-c=-2$

これを解くと，$(a,\ b,\ c)=(-7,\ 3,\ -12)$，$(-2,\ -2,\ -2)$

(2) $a+b^2=0$，$2b+c\fallingdotseq 0$ のとき，①は $(x-1)^2=x^2-2x+1=0$ と同値。

x についての各項の係数の係数を比較して，$a+b^2=0$，$2b+c=-3$，$2a-c=-3$

これを解くと，$(a,\ b,\ c)=\left(\dfrac{-7\mp\sqrt{13}}{2},\ \dfrac{1\pm\sqrt{13}}{2},\ -4\mp\sqrt{13}\right)$（複号同順）

(3) $a+b^2=0$，$2b+c=0$ のとき，①は $x-1=0$ と同値。このとき，$2a-c=-6$

これを解くと，$(a,\ b,\ c)=\left(\dfrac{-7\mp\sqrt{13}}{2},\ \dfrac{1\pm\sqrt{13}}{2},\ -1\mp\sqrt{13}\right)$（複号同順）

以上をまとめると，$(a,\ b,\ c)=(-7,\ 3,\ -12)$，$(-2,\ -2,\ -2)$，$\left(\dfrac{-7\mp\sqrt{13}}{2},\ \dfrac{1\pm\sqrt{13}}{2},\ -4\mp\sqrt{13}\right)$，

$\left(\dfrac{-7\mp\sqrt{13}}{2},\ \dfrac{1\pm\sqrt{13}}{2},\ -1\mp\sqrt{13}\right)$（複号同順） $\boxed{\text{答}}$

（2022/5/1　ジョーカー）