● **問題 413 〈追加問題〉 解答**＜三角定規＞

題意は

(Ⅰ) $a+b^2\neq 0$ かつ $(a+b^2)(x-1)^3=0$

(Ⅱ) $a+b^2=0$ かつ $2b+c\neq 0$ かつ $(2b+c)(x-1)^2=0$

(Ⅲ) $a+b^2=0$ かつ $2b+c=0$ かつ $2a-c+6=0$

と同値。

(Ⅰ)のとき

$$(a+b^2)x^3+(2b+c)x^2+6x+2a-c$$
$$=(a+b^2)(x-1)^3=(a+b^2)(x^3-3x^2+3x-1)=0$$

展開し各項の係数を比較すると

$2b+c=-3(a+b^2)$ …①

$6=3(a+b^2)$ …②

$2a-c=-(a+b^2)$ …③

$\therefore\ a+b^2=2$ …②′

$2b+c=-6$ …④

$2a-c=-2$ …⑤

$a+b=-4$ （$\because$ (④+⑤)/2 ） …⑥

②′, ⑥より

$b^2-b-6=(b-3)(b+2)=0\quad\therefore\ b=-2,\ 3$

このとき④⑥より

$(a,\ b,\ c)=(-2,\ -2,\ -2),\ (-7,\ 3,\ -12)$

(Ⅱ)のとき

$a+b^2=0$ …⑦

かつ $(2b+c)x^2+6x+2a-c=(2b+c)(x^2-2x+1)=0$

両辺比較して $2b+c=-3$ …⑧ $2b+c=2a-c$ $\therefore$ $a-b-c=0$ …⑨

⑦⑧⑨を連立させて解いて，

$$a=\frac{-7\pm\sqrt{13}}{2},\ b=\frac{1\mp\sqrt{13}}{2},\ c=-4\pm\sqrt{13}\quad(\text{複号同順})$$

(Ⅲ)のとき

$a+b^2=0$ かつ $2b+c=0$ かつ $2a-c+6=0$ を解いて

$$a=\frac{-7\pm\sqrt{13}}{2},\ b=\frac{1\mp\sqrt{13}}{2},\ c=-1\pm\sqrt{13}\quad(\text{複号同順})$$

以上をまとめて，求める解は

$(a,\ b,\ c)=\mathbf{(-2,\ -2,\ -2),\ (-7,\ 3,\ -12)},$

$$\left(\frac{-7\pm\sqrt{13}}{2},\ \frac{1\mp\sqrt{13}}{2},\ -4\pm\sqrt{13}\right),$$

$$\left(\frac{-7\pm\sqrt{13}}{2},\ \frac{1\mp\sqrt{13}}{2},\ -1\pm\sqrt{13}\right)\quad(\text{複号同順})\quad\cdots[\text{答}]$$