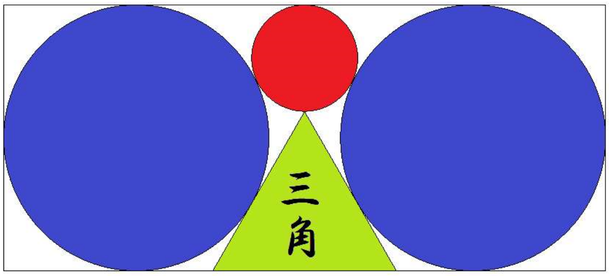
第 414 回　大垣八幡宮奉納算額 7

第 13 問題

長方形内に正三角形と青円 2 個と赤円を容れる。

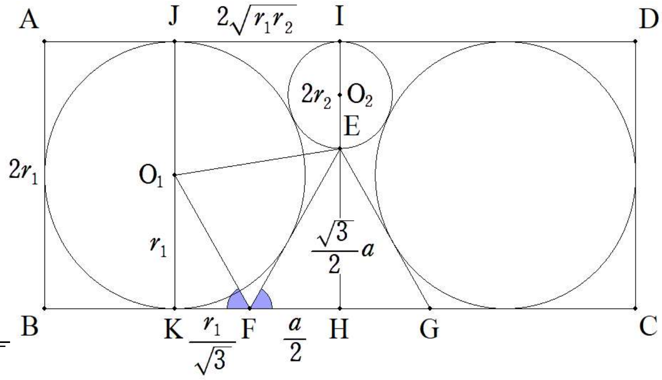
青円の直径を知って赤円の直径を求めよ。



術文（答）

赤円径＝$(3-\sqrt{6.75})$(青円径)

解答　図のように記号を付ける。



左側の青円，赤円をそれぞれ $O_1(r_1)$，$O_2(r_2)$ とおく。

正三角形 EFG の 1 辺を a とおくと，$EH=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$，

$FH=\dfrac{a}{2}$。

JI は 2 円の共通外接線の長さだから，$JI=2\sqrt{r_1 r_2}$

$\triangle O_1FK$ について，$\angle O_1FK=60^\circ$ であるから，$KF=\dfrac{r_1}{\sqrt{3}}$

KF＋FH＝JI より，$\dfrac{r_1}{\sqrt{3}}+\dfrac{a}{2}=2\sqrt{r_1 r_2}$　…①

IE＋EH＝AB より，$2r_2+\dfrac{\sqrt{3}}{2}a=2r_1$　…②

①× $\sqrt{3}$ −②より，$r_1-2r_2=2\sqrt{3}\sqrt{r_1 r_2}-2r_1$　$\therefore 2r_2+2\sqrt{3}\sqrt{r_1 r_2}-3r_1=0$

両辺を r_1 で割り，$\sqrt{\dfrac{r_2}{r_1}}=x$ とおくと，$2x^2+2\sqrt{3}x-3=0$　$x=\dfrac{-\sqrt{3}\pm 3}{2}$

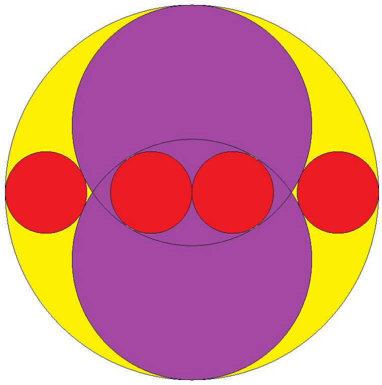
$x>0$ より，$x=\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$　$x^2=\dfrac{r_2}{r_1}=\dfrac{6-3\sqrt{3}}{2}=3-\sqrt{\dfrac{27}{4}}=3-\sqrt{6.75}$　$\therefore r_2=(3-\sqrt{6.75})r_1$

両辺に 2 を掛けると，$2r_2=(3-\sqrt{6.75})\cdot 2r_1$　よって，赤円径＝$(3-\sqrt{6.75})$(青円径)　答

第 14 問題

2 個の紫円を黄円に容れ，その間に 4 個の赤円を容れる。

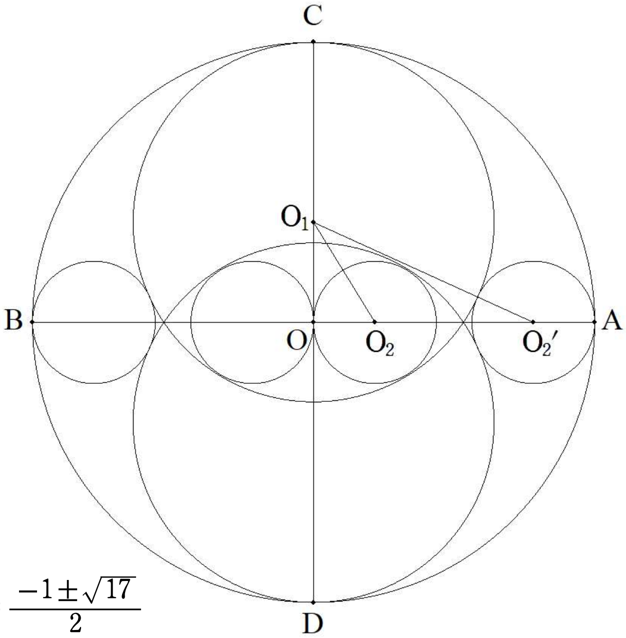
紫円の直径を知って黄円の直径を求めよ。



術文（答）

黄円径＝$(\sqrt{4.25}-0.5)$(紫円径)

解答　黄円をO(r)，上側の紫円を$O_1(r_1)$，右側の赤円を$O_2(r_2)$，$O_2'(r_2)$とおき，図のように記号を付ける。



$\triangle O_1OO_2$に三平方の定理を適用すると，

$(r-r_1)^2+r_2{}^2=(r_1-r_2)^2$　…①

$\triangle O_1OO_2'$に三平方の定理を適用すると，

$(r-r_1)^2+(r-r_2)^2=(r_1+r_2)^2$　…②

②−①より，$r^2-2rr_2-4r_1r_2=0$

$\therefore r_2=\dfrac{r^2}{2(r+2r_1)}$

これを①に代入して整理すると，

$r(r^2+rr_1-4r_1{}^2)=0$

$r>0$ より，$r^2+rr_1-4r_1{}^2=0$

両辺を$r_1{}^2$で割り，$\dfrac{r}{r_1}=x$ とおくと，$x^2+x-4=0$　$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$

$x>0$ より，$x=\dfrac{r}{r_1}=\dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}=\sqrt{4.25}-0.5$　$\therefore r=(\sqrt{4.25}-0.5)r_1$

両辺に 2 を掛けると，$2r=(\sqrt{4.25}-0.5)\cdot 2r_1$　よって，黄円径＝$(\sqrt{4.25}-0.5)$(紫円径)　答

補足

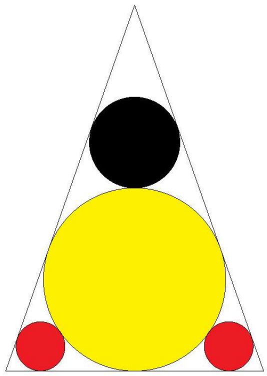
（紫円を知るとき）$r=\dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}r_1 \fallingdotseq 1.56155r_1$，$r_2=\dfrac{-11+3\sqrt{17}}{4}r_1 \fallingdotseq 0.342329r_1$

（赤円を知るとき）$r=\dfrac{5+\sqrt{17}}{2}r_2 \fallingdotseq 4.56155r_2$，$r_1=\dfrac{11+3\sqrt{17}}{8}r_2 \fallingdotseq 2.92116r_2$

第15問題

二等辺三角形に内接する黄円を描きその間に黒円1個と赤円2個を容れる。

赤円と黒円との直径を知って黄円の直径を求めよ。

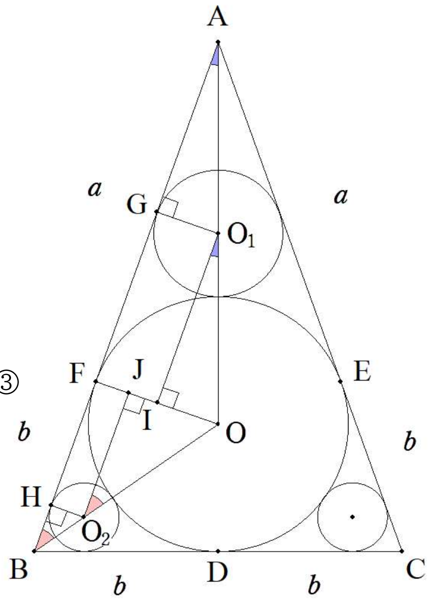


術文（答）

　黄径＝赤径＋$2\sqrt{\text{赤径}\cdot\text{黒径}}$

解答　図のように記号を付け，黄円を $\mathrm{O}(R)$，黒円を $\mathrm{O_1}(r_1)$，赤円を $\mathrm{O_2}(r_2)$ とおき，

$\mathrm{AE}=\mathrm{AF}=a$，$\mathrm{BF}=\mathrm{BD}=\mathrm{CD}=\mathrm{CE}=b$ とおく。



三角形の周の長さの半分 $s=\dfrac{2b+(b+a)+(a+b)}{2}=a+2b$

ヘロンの公式により，$S=\sqrt{(a+2b)\cdot a\cdot b\cdot b}=b\sqrt{a(a+2b)}$

また，$S=Rs=R(a+2b)=b\sqrt{a(a+2b)}$ より，

両辺を2乗して整理すると，$R^2(a+2b)=ab^2$　…①

共通外接線の長さは，$\mathrm{GF}=\mathrm{O_1I}=2\sqrt{Rr_1}$，$\mathrm{FH}=\mathrm{JO_2}=2\sqrt{Rr_2}$ である。

$\triangle\mathrm{AFO}\backsim\triangle\mathrm{O_1IO}$ であるから，$\dfrac{R}{a}=\dfrac{R-r_1}{2\sqrt{Rr_1}}$ より，$a=\dfrac{2R\sqrt{Rr_1}}{R-r_1}$　…②

同様に，$\triangle\mathrm{BFO}\backsim\triangle\mathrm{O_2JO}$ から，$\dfrac{R}{b}=\dfrac{R-r_2}{2\sqrt{Rr_2}}$ より，$b=\dfrac{2R\sqrt{Rr_2}}{R-r_2}$　…③

②，③を①に代入すると，

$$R^2\left(\frac{2R\sqrt{Rr_1}}{R-r_1}+2\cdot\frac{2R\sqrt{Rr_2}}{R-r_2}\right)=\frac{2R\sqrt{Rr_1}}{R-r_1}\cdot\left(\frac{2R\sqrt{Rr_2}}{R-r_2}\right)^2$$

両辺を $2R^3\sqrt{R}$ で割り，分母を払うと，

$$\sqrt{r_1}(R-r_2)^2+2\sqrt{r_2}(R-r_1)(R-r_2)=4Rr_2\sqrt{r_1}$$

R について整理すると，$(\sqrt{r_1}+2\sqrt{r_2})R^2-2\sqrt{r_2}(r_1+3\sqrt{r_1r_2}+r_2)R+r_2\sqrt{r_1r_2}(2\sqrt{r_1}+\sqrt{r_2})=0$

$$\begin{array}{llll}
1 & -2\sqrt{r_1r_2}-r_2 & \longrightarrow & -2r_1\sqrt{r_2}-r_2\sqrt{r_1}-4r_2\sqrt{r_1}-2r_2\sqrt{r_2} \\
\sqrt{r_1}+2\sqrt{r_2} & -r_2\sqrt{r_1} & \longrightarrow & -r_2\sqrt{r_1} \\
\hline
\sqrt{r_1}+2\sqrt{r_2} & r_2\sqrt{r_1r_2}(2\sqrt{r_1}+\sqrt{r_2}) & & -2\sqrt{r_2}(r_1+3\sqrt{r_1r_2}+r_2)
\end{array}$$

因数分解すると，$\{R-(2\sqrt{r_1r_2}+r_2)\}\{(\sqrt{r_1}+2\sqrt{r_2})R-r_2\sqrt{r_1}\}=0$

$\therefore R=r_2+2\sqrt{r_1r_2}$，$R=\dfrac{r_2\sqrt{r_1}}{\sqrt{r_1}+2\sqrt{r_2}}$

後者の方は，$R=\dfrac{r_2\sqrt{r_1}}{\sqrt{r_1}+2\sqrt{r_2}}<\dfrac{r_2\sqrt{r_1}}{\sqrt{r_1}}=r_2$ となり，$R>r_2$ に反するから不適である。

よって，$R=r_2+2\sqrt{r_1r_2}$

両辺に2を掛けると，$2R=2r_2+2\sqrt{2r_1\cdot 2r_2}$　*i.e.*　黄径＝赤径＋$2\sqrt{\text{赤径}\cdot\text{黒径}}$　答

(2022/5/29　ジョーカー)