第 414 回追加問題

4 次方程式 $x^4-x^3+ax^2+x+1=0$ は虚数解 α をもち，$\left(\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\right)^{16}>0$ のとき，実数 a の値を求めよ。

$\boxed{\text{解答}}$　α は方程式 $x^4-x^3+ax^2+x+1=0$ の解であるから，$\alpha^4-\alpha^3+a\alpha^2+\alpha+1=0$

両辺を α^2 で割り，$\alpha-\dfrac{1}{\alpha}$ について整理すると，$\left(\alpha-\dfrac{1}{\alpha}\right)^2-\left(\alpha-\dfrac{1}{\alpha}\right)+a+2=0$　…①

α が虚数のとき，$\alpha-\dfrac{1}{\alpha}$ は虚数である。

（∵）$p,\ q$ を実数，$q\fallingdotseq 0$ とし，$\alpha=p+qi$ とおくと，

$\alpha-\dfrac{1}{\alpha}=p+qi-\dfrac{1}{p+qi}=p-\dfrac{p}{p^2+q^2}+q\left(1+\dfrac{1}{p^2+q^2}\right)i$

ここで，$q\fallingdotseq 0$，$1+\dfrac{1}{p^2+q^2}>0$ であるから，$\alpha-\dfrac{1}{\alpha}$ の虚部は 0 になりえない。

よって，α が虚数のとき，$\alpha-\dfrac{1}{\alpha}$ は虚数である。■

①の $\alpha-\dfrac{1}{\alpha}$ に関する 2 次方程式は虚数解をもつから，その判別式をDとおくと，D<0である。

$D=(-1)^2-4\cdot1(a+2)=-4a-7<0$ より，$a>-\dfrac{7}{4}$　…②

このとき，①より，$\alpha-\dfrac{1}{\alpha}=\dfrac{1\pm\sqrt{4a+7}\,i}{2}$

両辺を 2 乗すると，$\alpha^2-2+\dfrac{1}{\alpha^2}=\dfrac{-2a-3\pm\sqrt{4a+7}\,i}{2}$

両辺に 4 を加えると，$\left(\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\right)^2=\dfrac{-2a+5}{2}\pm\dfrac{\sqrt{4a+7}}{2}i$

両辺の絶対値をとると，$\left|\left(\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\right)^2\right|=\sqrt{\left(\dfrac{-2a+5}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{4a+7}}{2}\right)^2}=\sqrt{a^2-4a+8}$

$\left(\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\right)^2=\sqrt{a^2-4a+8}\,(\cos\theta+i\sin\theta)$　…③とおける。

ここに，$\cos\theta=\dfrac{-2a+5}{2\sqrt{a^2-4a+8}}$　…④，$\sin\theta=\pm\dfrac{\sqrt{4a+7}}{2\sqrt{a^2-4a+8}}$ である。

③の両辺を 8 乗すると，$\left(\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\right)^{16}=(a^2-4a+8)^4(\cos 8\theta+i\sin 8\theta)$

$\left(\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\right)^{16}>0$ であるから，$\cos 8\theta=1$ であればよい。$8\theta=2k\pi$ より，$\theta=\dfrac{k\pi}{4}$（k は整数）

これを④に代入すると，$\cos\dfrac{k\pi}{4}=\dfrac{-2a+5}{2\sqrt{a^2-4a+8}}$

$\cos\dfrac{k\pi}{4}$ の値は，$k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$ の 5 種類であるから，

[1]　$k=0$ のとき，$\cos 0=1=\dfrac{-2a+5}{2\sqrt{a^2-4a+8}}$ を解くと，$a=-\dfrac{7}{4}$　∴②を満たさないので不適。

[2]　$k=1$ のとき，$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{-2a+5}{2\sqrt{a^2-4a+8}}$ を解くと，$a=\frac{6-3\sqrt{2}}{2}$　∴②を満たすので適。

[3]　$k=2$ のとき，$\cos\frac{2\pi}{4}=0=\frac{-2a+5}{2\sqrt{a^2-4a+8}}$ を解くと，$a=\frac{5}{2}$　∴②を満たすので適。

[4]　$k=3$ のとき，$\cos\frac{3\pi}{4}=-\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{-2a+5}{2\sqrt{a^2-4a+8}}$ を解くと，$a=\frac{6+3\sqrt{2}}{2}$　∴②を満たすので適。

[5]　$k=4$ のとき，$\cos\pi=-1=\frac{-2a+5}{2\sqrt{a^2-4a+8}}$ を解くと，解なし。∴不適。

以上により，求める実数 a の値は，$a=\frac{5}{2}$，$\frac{6\pm3\sqrt{2}}{2}$　答

(2022/5/29　ジョーカー)