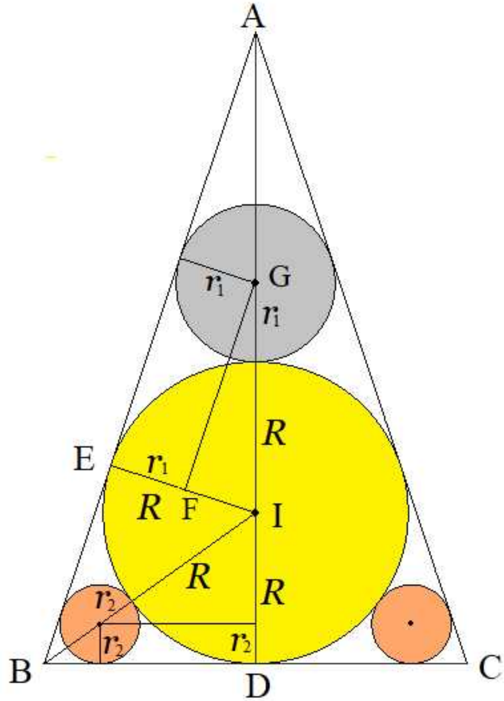
● 問題 414 解答＜三角定規＞

［第15問題］

右図のように各点を定め, 3 円の半径を R, r_1, r_2 とする。



図において, △ AEI ∽ △ GFI

$$\therefore\ \mathrm{AI}:\mathrm{GI}=\mathrm{EI}:\mathrm{FI}$$

$$\therefore\ \mathrm{AI}=\frac{\mathrm{GI}\cdot\mathrm{EI}}{\mathrm{FI}}=\frac{R(R+r_1)}{R-r_1}=R\left(1+\frac{2r_1}{R-r_1}\right)\quad\cdots①$$

$$\therefore\ \mathrm{AE}^2=\mathrm{AI}^2-\mathrm{EI}^2$$

$$=R^2\left\{\frac{4r_1}{R-r_1}+\frac{4{r_1}^2}{(R-r_1)^2}\right\}\cdots②\ (\because①)$$

同様にして

$$\therefore\ \mathrm{BE}^2=\mathrm{BI}^2-\mathrm{DI}^2$$

$$=R^2\left\{\frac{4r_2}{R-r_2}+\frac{4{r_2}^2}{(R-r_2)^2}\right\}\cdots③$$

また, △ AEI ∽ △ ADB より

$$\mathrm{AE}:\mathrm{EI}=\mathrm{AD}:\mathrm{DB}=\mathrm{AD}+\mathrm{BE}$$

$$\therefore\ \mathrm{AE}\cdot\mathrm{BE}=\mathrm{EI}\cdot\mathrm{AD}$$

$$\therefore\ \mathrm{AE}^2\cdot\mathrm{BE}^2=\mathrm{EI}^2\cdot\mathrm{AD}^2=R^2(\mathrm{AI}+R)^2\quad\cdots④$$

④に①②③を代入

$$R^2\left\{\frac{4r_1}{R-r_1}+\frac{4{r_1}^2}{(R-r_1)^2}\right\}\cdot R^2\left\{\frac{4r_2}{R-r_2}+\frac{4{r_2}^2}{(R-r_2)^2}\right\}=R^2\cdot R^2\left(2+\frac{2r_1}{R-r_1}\right)^2$$

分母を払って順次整理すると

$$4\{r_1(R-r_1)+{r_1}^2\}\{r_2(R-r_2)+{r_2}^2\}=\{(R-r_1)+r_1\}^2(R-r_2)^2$$

$$\therefore\ 4r_1r_2=(R-r_1)^2$$

$$R^2-2r_2R+{r_2}^2-4r_1r_2=0$$

これを $R>0$ で解いて　$R=r_2+2\sqrt{r_1r_2}$

以上より　**黄径＝赤径＋2√黄径·赤径**　…［答］