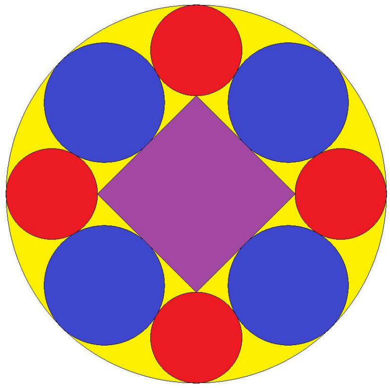
第415回　大垣八幡宮奉納算額８

第16問題

黄円内に紫正方形と青円赤円4個ずつを容れる。

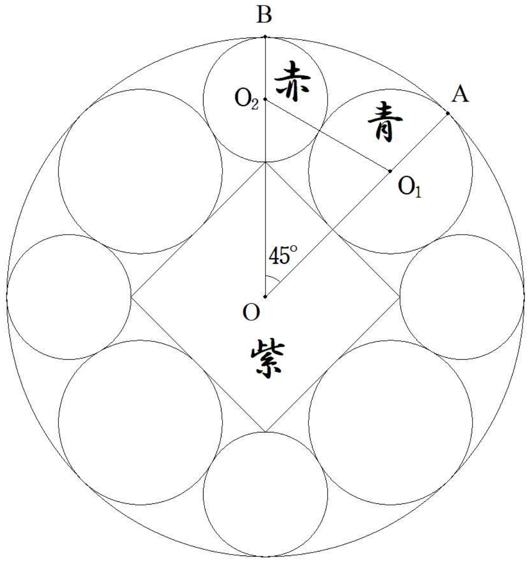
赤円径を知って黄円径を求めよ。



術文（答）

$$黄径 = (1.5 + \sqrt{4.25 + 2\sqrt{2}})(赤径)$$

解答　図のように記号を付ける。



黄円，青円，赤円をそれぞれ$O(R)$，$O_1(r_1)$，$O_2(r_2)$，

紫正方形の１辺を $2a$ とおく。

$OA = a + 2r_1 = R$　…①

$OB = \sqrt{2}a + 2r_2 = R$　…②

①× $\sqrt{2}$ −②より，$2\sqrt{2}r_1 - 2r_2 = (\sqrt{2} - 1)R$

$$\therefore r_1 = \frac{(\sqrt{2} - 1)R + 2r_2}{2\sqrt{2}} \quad \cdots③$$

$\angle O_2OO_1 = 45°$ より，$\triangle OO_1O_2$ に余弦定理を適用すると，

$$(r_1 + r_2)^2 = (R - r_1)^2 + (R - r_2)^2 - 2(R - r_1)(R - r_2)\cos 45°$$

$\cos 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ であるから，r_1 について整理すると，

$$\{(2 - \sqrt{2})R + (2 + \sqrt{2})r_2\}r_1 - (2 - \sqrt{2})R(R - r_2) = 0$$

これに③を代入すると，$\{(2 - \sqrt{2})R + (2 + \sqrt{2})r_2\} \cdot \dfrac{(\sqrt{2} - 1)R + 2r_2}{2\sqrt{2}} - (2 - \sqrt{2})R(R - r_2) = 0$

整理すると，$R^2 - 3Rr_2 - 2(1 + \sqrt{2})r_2{}^2 = 0$

両辺を $r_2{}^2$ で割り，$\dfrac{R}{r_2} = x$ とおくと，$x^2 - 3x - 2(1 + \sqrt{2}) = 0$　　$x = \dfrac{3 \pm \sqrt{17 + 8\sqrt{2}}}{2}$

$x > 0$ より，$x = \dfrac{R}{r_2} = \dfrac{3 + \sqrt{17 + 8\sqrt{2}}}{2} = 1.5 + \sqrt{4.25 + 2\sqrt{2}}$　　$\therefore R = (1.5 + \sqrt{4.25 + 2\sqrt{2}})r_2$

両辺に２を掛けて，黄径$= (1.5 + \sqrt{4.25 + 2\sqrt{2}})$(赤径)　答

補足　赤円の半径を r_2 とすると，

黄円の半径：$R = \dfrac{3 + \sqrt{17 + 8\sqrt{2}}}{2}r_2 \fallingdotseq 4.16053r_2$

青円の半径：$r_1 = \dfrac{6 + \sqrt{2} + \sqrt{38 - 20\sqrt{2}}}{8}r_2 \fallingdotseq 1.3164r_2$

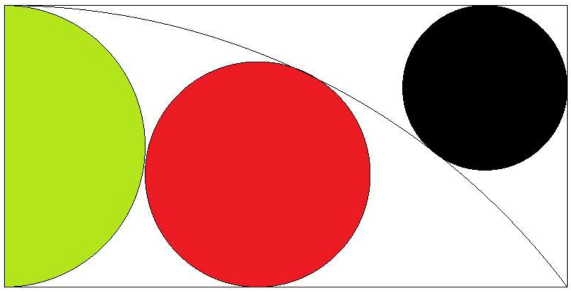
紫正方形の一辺：$2a = \dfrac{-\sqrt{2} + \sqrt{34 + 16\sqrt{2}}}{2}r_2 \fallingdotseq 3.05545r_2$

第 17 問題

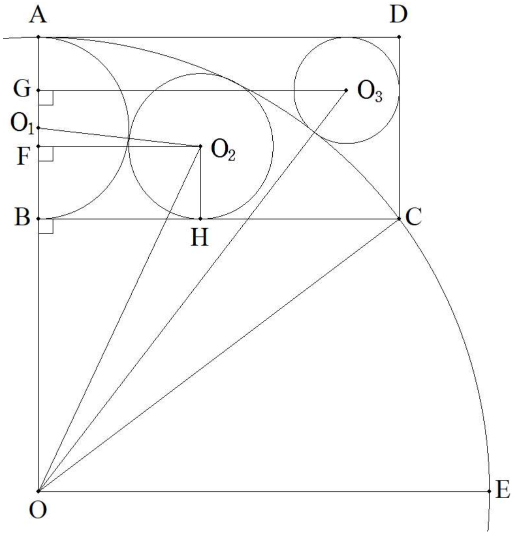
長方形内に半円（萌黄）と円弧を描き，
その円に赤円と黒円とを容れる。
極大な赤円と黒円の直径を知って長方形
の長い方の一辺を求めよ。

術文（答）

$$長方形の一辺= \dfrac{黒径}{1-\sqrt{\dfrac{黒径}{赤径}}}$$



解答　図のように記号を付け，長方形内の弧を O (R)，
長方形の長い方の一辺を AD=BC= x，萌黄円，赤円，黒円を
それぞれ $O_1(r_1)$，$O_2(r_2)$，$O_3(r_3)$ とおく。



△OCB について，CB= x，BO= $R-2r_1$，OC= R であるから，
三平方の定理を適用して， $x^2+(R-2r_1)^2=R^2$

$\therefore x^2-4Rr_1+4r_1{}^2=0$　…①

△OO_2F について，O_2F=HB= $2\sqrt{r_1r_2}$，FO= $R-2r_1+r_2$，
OO_2= $R-r_2$ であるから，三平方の定理を適用して，

$(2\sqrt{r_1r_2})^2+(R-2r_1+r_2)^2=(R-r_2)^2$

$\therefore -(r_1-r_2)R+r_1{}^2=0$　…②

△OO_3G について，O_3G= $x-r_3$，GO= $R-r_3$，OO_3= $R+r_3$ で
あるから，三平方の定理を適用して， $(x-r_3)^2+(R-r_3)^2=(R+r_3)^2$　$\therefore x^2-2xr_3+r_3{}^2-4Rr_3=0$　…③

これからの計算は，①，②，③から R と r_1 を消去した式を， x について解く。

①× (r_1-r_2) −②× $4r_1$ を計算して， R を消去し， r_1 について整理すると， $4r_2r_1{}^2-x^2r_1+r_2x^2=0$　…④

②× $4r_3$ −③× (r_1-r_2) を計算して， R を消去し， r_1 について整理すると，

$4r_3r_1{}^2-(r_3-x)^2r_1+r_2(r_3-x)^2=0$　…⑤

④× r_3 +⑤× r_2 を計算して， $r_1{}^2$ の項を消去すると， $-(r_2-r_3)\{r_2r_3{}^2-2r_2r_3x+(r_2-r_3)x^2\}=0$

$r_2-r_3>0$ より， $(r_2-r_3)x^2-2r_2r_3x+r_2r_3{}^2=0$

両辺に $\dfrac{r_2-r_3}{r_3{}^2}$ を掛け， $\dfrac{(r_2-r_3)x}{r_3}=y$ とおくと， $y^2-2r_2y+r_2(r_2-r_3)=0$

$\therefore y=\dfrac{(r_2-r_3)x}{r_3}=r_2\pm\sqrt{r_2r_3}=\dfrac{r_2{}^2-r_2r_3}{r_2\mp\sqrt{r_2r_3}}=\dfrac{r_2(r_2-r_3)}{r_2\mp\sqrt{r_2r_3}}$ より，$x=\dfrac{r_2r_3}{r_2\mp\sqrt{r_2r_3}}=\dfrac{r_3}{1\mp\sqrt{\dfrac{r_3}{r_2}}}$　（複号同順）

ここで，複号を決める。 $x=\dfrac{r_3}{1+\sqrt{\dfrac{r_3}{r_2}}}$ の方は， $x<\dfrac{r_3}{1+0}=r_3$ となるが，これは不適である。（$\because$ $x>r_3$ より）

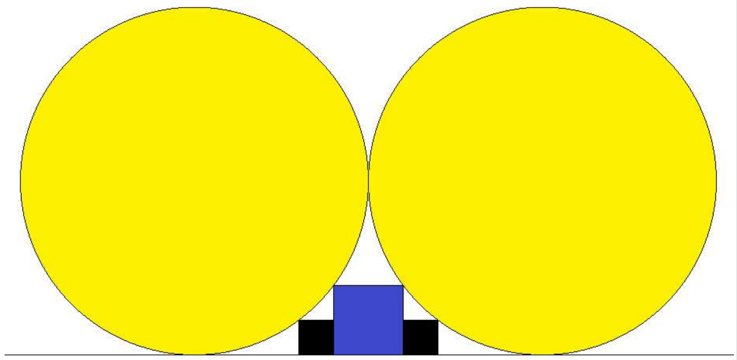
よって， $x=\dfrac{r_3}{1-\sqrt{\dfrac{r_3}{r_2}}}$　両辺に 2 を掛けて， $2x=\dfrac{2r_3}{1-\sqrt{\dfrac{2r_3}{2r_2}}}$　*i,e.*　長方形の一辺= $\dfrac{黒径}{1-\sqrt{\dfrac{黒径}{赤径}}}$　答

第 18 問題

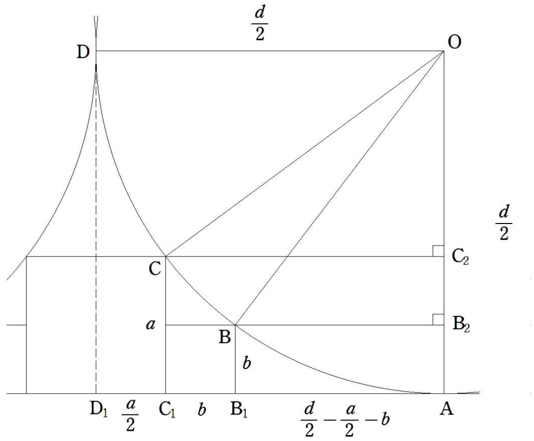
外接する等円（黄）の共通接線と円の間に青正方形と 2 個の黒正方形を容れる。
黄円の直径を知って黒正方形の一辺を求めよ。

術文（答）

黒正方形の一辺＝黄径/ 10



解答　黄円の直径を d，青正方形，黒正方形の 1 辺をそれぞれ a，b とし，図のように記号を付ける。



△OCC_2 に三平方の定理を適用すると，

$$\left(\frac{d}{2}-\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{d}{2}-a\right)^2=\left(\frac{d}{2}\right)^2 \quad \cdots①$$

△OBB_2 に三平方の定理を適用すると，

$$\left(\frac{d}{2}-\frac{a}{2}-b\right)^2+\left(\frac{d}{2}-b\right)^2=\left(\frac{d}{2}\right)^2 \quad \cdots②$$

①から，$a=\dfrac{d}{5}$，d　題意に適するのは，$a=\dfrac{d}{5}$

これを②に代入すると，

$$\left(\frac{d}{2}-\frac{d}{10}-b\right)^2+\left(\frac{d}{2}-b\right)^2=\left(\frac{d}{2}\right)^2 \quad \therefore b=\frac{d}{10},\ \frac{4}{5}d$$

題意に適するのは，$b=\dfrac{d}{10}$　よって，黒正方形の一辺＝黄径/ 10　答

（2022/6/27　ジョーカー）