第 415 回追加問題

x，y，z は実数で，$x+y+z=x^2+y^2+z^2=2$ のとき，次の式の最大値，最小値をそれぞれ求めよ。

(1)　$max(x,\ y,\ z)-min(x,\ y,\ z)$

(2)　$x^3+y^3+z^3$

解答

(1)　$x+y+z=2$　…①，$x^2+y^2+z^2=2$　…②とおく。

$$xy+yz+zx=\frac{(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)}{2}=\frac{2^2-2}{2}=1 \quad \cdots③$$

①より，$x+z=2-y$　…④

③より，$xz=1-y(x+z)=(y-1)^2$　…⑤

④，⑤より，x，z は，$t^2-(2-y)t+(y-1)^2=0$ の 2 解である。

この t についての 2 次方程式の判別式をDとおくと，実数解をもつから，D≧0

D$=(2-y)^2-4(y-1)^2=y(4-3y)\geqq 0$より，$0\leqq y\leqq\frac{4}{3}$　…⑥

よって，$x\geqq z$ のときは，$x=\frac{2-y+\sqrt{y(4-3y)}}{2}$，$z=\frac{2-y-\sqrt{y(4-3y)}}{2}$　…⑦である。

いま，$x\geqq y\geqq z$ と仮定すると，$\frac{2-y+\sqrt{y(4-3y)}}{2}\geqq y\geqq\frac{2-y-\sqrt{y(4-3y)}}{2}$　$\therefore |3y-2|\leqq\sqrt{y(4-3y)}$

これを解くと，$\frac{1}{3}\leqq y\leqq 1$　…⑧

このとき，$w=max(x,\ y,\ z)-min(x,\ y,\ z)$ とおくと，

$$w=\frac{2-y+\sqrt{y(4-3y)}}{2}-\frac{2-y-\sqrt{y(4-3y)}}{2}=\sqrt{y(4-3y)}=\sqrt{\frac{4}{3}-3\left(y-\frac{2}{3}\right)^2}$$

⑧の範囲のとき，w は，

$y=\frac{1}{3}$，1 のとき，⑦より，$(x,\ y,\ z)=\left\{\frac{4}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right\}$，$\{1,\ 1,\ 0\}$ のとき，最小値 1

$y=\frac{2}{3}$ のとき，⑦より，$(x,\ y,\ z)=\left\{\frac{2+\sqrt{3}}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{2-\sqrt{3}}{3}\right\}$ のとき，最大値 $\frac{2}{\sqrt{3}}$ をとる。

(2)　⑥のとき，x，z は実数となり，しかも④，⑤の関係があるので，

$x^3+y^3+z^3=y^3+(x+z)^3-3xz(x+z)=y^3+(2-y)^3-3(y-1)^2(2-y)=3y^3-6y^2+3y+2=f(y)$ とおく。

$f'(y)=3(3y-1)(y-1)$ であるから，次の $f(y)=x^3+y^3+z^3$ の増減表より，$2\leqq x^3+y^3+z^3\leqq\frac{22}{9}$

$f'(y)=3(3y-1)(y-1)$ であるから，

右の $f(y)=x^3+y^3+z^3$ の増減表より，

$2\leqq x^3+y^3+z^3\leqq\frac{22}{9}$

y	0	…	$\frac{1}{3}$	…	1	…	$\frac{4}{3}$
$f'(y)$		+	0	−	0	+	
$f(y)$	2	↗	$\frac{22}{9}$	↘	2	↗	$\frac{22}{9}$

最小値 2 となるのは，$(x,\ y,\ z)=\{1,\ 1,\ 0\}$ のとき。最大値 $\frac{22}{9}$ となるのは，$(x,\ y,\ z)=\left\{\frac{4}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right\}$ のとき。答

別解　(2)　$xyz=k$　…⑨とおくと，①，③，⑨より，x，y，z は $t^3-2t^2+t-k=0$ の 3 実解であるから，

$f(t)=t^3-2t^2+t-k$ とおくと，$f(t)$ は極値をもち，かつ，極値の積が負又は 0 である。

$f'(t)=3t^2-4t+1=0$ より，$t=1,\ \dfrac{1}{3}$（極大値，極小値をもつ）

$f(1)f\left(\dfrac{1}{3}\right)=-k\left(\dfrac{4}{27}-k\right)\leqq 0$ より，$0\leqq k\leqq\dfrac{4}{27}$　…⑩

$x^3+y^3+z^3=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+3xyz=2(2-1)+3k=3k+2$

⑩より，$2\leqq x^3+y^3+z^3\leqq\dfrac{22}{9}$

最小値 2 となるのは，$(x,\ y,\ z)=\{1,\ 1,\ 0\}$ のとき。最大値 $\dfrac{22}{9}$ となるのは，$(x,\ y,\ z)=\left\{\dfrac{4}{3},\ \dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{3}\right\}$ のとき。答

（2022/6/27　ジョーカー）