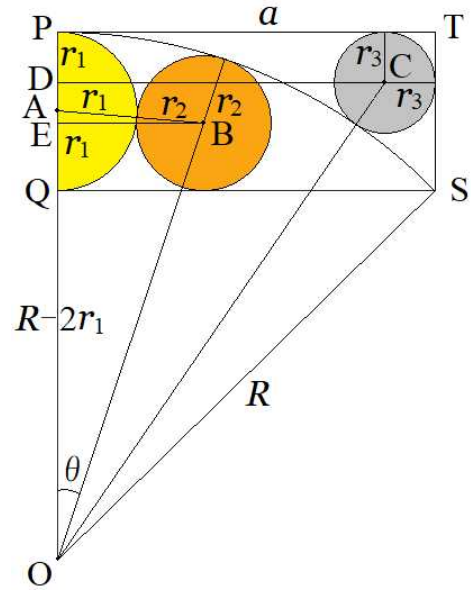
● 問題 415 解答＜三角定規＞

［第17問題］（計算の途中経過をかなり省略しました）

右図のように各点を定め, 4 円の半径を R, r_1, r_2, r_3 とする。



△ OQS は直角三角形だから

$a^2+(R-2r_1)^2=R^2 \quad \therefore\ 4r_1^2=4r_1R-a^2$ …①

△ OAB に余弦定理を適用し

$(R-r_1)^2+(R-r_2)^2-2(R-r_1)(R-r_2)\cos\theta=(r_1+r_2)^2$ …②

また, $\mathrm{OE}=\mathrm{OB}\cos\theta \quad \therefore\ R-2r_1+r_2=(R-r_2)\cos\theta$ …③

②を展開し③を用いて整理すると　$4r_1^2=4(r_1-r_2)R$ …④

①④より, $a^2=4r_2R$ …⑤

△ OCD は直角三角形だから, $\mathrm{CD}^2+\mathrm{OD}^2=\mathrm{OC}^2$

$\therefore\ (a-r_3)^2+(\mathrm{R}-r_3)^2=(\mathrm{R}+r_3)^2$

これを展開し整理して

$a^2-2r_3a-4r_3R+r_3^2=0$ …⑥

⑤⑥より R を消去し整理すると

$(r_2-r_3)a^2-2r_2r_3a+r_2r_3^2=0$ …⑦

⑦を a ＞ 0 で解くと

$$a=\frac{r_2r_3+r_3\sqrt{r_2r_3}}{r_2-r_3}=\frac{r_3}{r_2-r_3}(r_2+\sqrt{r_2r_3})\cdot\frac{r_2-\sqrt{r_2r_3}}{r_2-\sqrt{r_2r_3}}=\frac{r_3}{r_2-r_3}\cdot\frac{r_2(r_2-r_3)}{r_2-\sqrt{r_2r_3}}$$

$$=\frac{r_3}{1-\sqrt{\dfrac{r_3}{r_2}}}=\frac{\textbf{黒径}}{\mathbf{1}-\sqrt{\dfrac{\textbf{黒径}}{\textbf{赤径}}}}\quad\cdots\ [答]$$