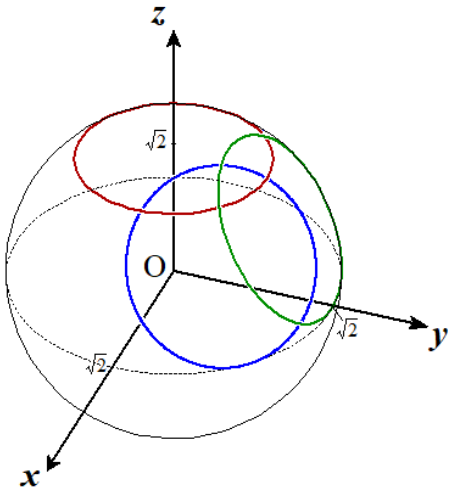
● 問題 415<追加問題>解答＜三角定規＞

$x+y+z=2$ …①

$x^2+y^2+z^2=2$ …②



原点と平面①との距離は $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ だから，①と②の交線は半径 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ の円で，右図の 青線 になる。

これを z 軸の回りに $\dfrac{\pi}{4}$ 回すと 緑線 に，緑線 を x 軸の回りに $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ となる角 α 回転させると 茶色 の円となる。

茶円の方程式はパラメータ θ $(0 \leqq \theta\ 2\pi)$ を用い

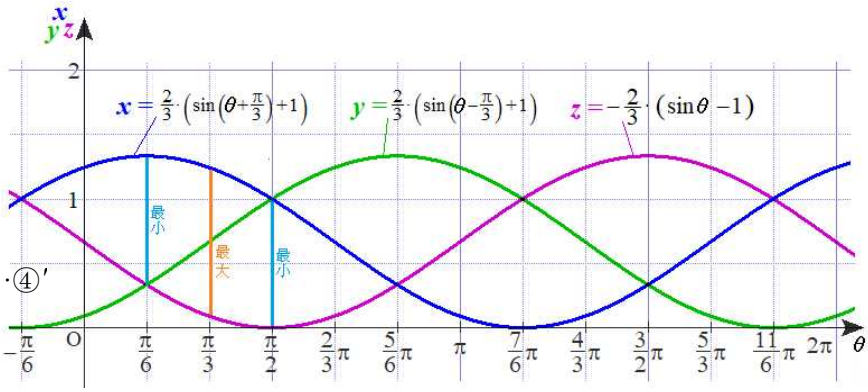
$$x=\frac{\sqrt{6}}{3}\cos\theta,\quad y=\frac{\sqrt{6}}{3}\sin\theta,\quad z=\frac{2\sqrt{3}}{3}\quad\cdots③$$

軸の回りの回転を元に戻すことにより，青円の方程式は

$$\begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\cos\theta+\dfrac{1}{3}\sin\theta+\dfrac{2}{3} \\ y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\cos\theta+\dfrac{1}{3}\sin\theta+\dfrac{2}{3} \\ z=-\dfrac{2}{3}\sin\theta+\dfrac{2}{3} \end{cases}\quad\cdots④$$

(1) ④より

$$\begin{cases} x=\dfrac{2}{3}\left(\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)+1\right) \\ y=\dfrac{2}{3}\left(\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)+1\right) \\ z=-\dfrac{2}{3}(\sin\theta-1) \end{cases}\quad\cdots④'$$



$x,\ y,\ z$ の変化はグラフのようになるから，周期性と対称性より $\dfrac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ で調べれば十分で

このとき $\max(x,\ y,\ z)=x,\ \min(x,\ y,\ z)=z$ 。

$$f(\theta)=x-z=\frac{\sqrt{3}}{3}\cos\theta+\sin\theta=\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)\quad\left(\frac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right)$$ より

$f(\theta)$ の最大値は $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ $\left(\theta=\dfrac{\pi}{3}\right)$，最小値は 1 $\left(\theta=\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$

以上より $\max(x,\ y,\ z)-\min(x,\ y,\ z)$ の最大値，最小値は

最大値 $\boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{3}}{3}}$。 $(x,\ y\ ,z)=\left(\dfrac{2+\sqrt{3}}{3},\ \dfrac{2-\sqrt{3}}{3},\ \dfrac{2}{3}\right),\ \left(\dfrac{2+\sqrt{3}}{3},\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{2-\sqrt{3}}{3}\right),\ \left(\dfrac{2}{3},\ \dfrac{2+\sqrt{3}}{3},\ \dfrac{2-\sqrt{3}}{3}\right),$

$\left(\dfrac{2-\sqrt{3}}{3},\ \dfrac{2+\sqrt{3}}{3},\ \dfrac{2}{3}\right),\ \left(\dfrac{2-\sqrt{3}}{3},\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{2+\sqrt{3}}{3}\right),\ \left(\dfrac{2}{3},\ \dfrac{2-\sqrt{3}}{3},\ \dfrac{2+\sqrt{3}}{3}\right)$

最小値 **1**。$(x,\ y\ ,z)=\left(\frac{4}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right),\ \left(\frac{1}{3},\ \frac{4}{3},\ \frac{1}{3}\right),\ \left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{4}{3}\right),$

$(1,\ 1,\ 0),\ (0,\ 1,\ 1),\ (1,\ 0,\ 1)$

(2) ④より

$$F=x^3+y^3+z^3=\cdots(\text{省略})\cdots=\frac{2}{9}(\sin 3\theta+10)\ \cdots⑤$$

⑤より，F の最大値は $\sin 3\theta=1$ のときの $F=\frac{22}{9}$。このとき $3\theta=\frac{\pi}{2},\ \frac{5\pi}{2},\ \frac{9\pi}{2}$。

最小値は $\sin 3\theta=-1$ のときの $F=2$。このとき $3\theta=\frac{3\pi}{2},\ \frac{7\pi}{2},\ \frac{11\pi}{2}$。

整理して，求める最大値および最小値は

最大値 $\mathbf{\frac{22}{9}}$。 $(x,\ y,\ z)=\left(\frac{4}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right),\ \left(\frac{1}{3},\ \frac{4}{3},\ \frac{1}{3}\right),\ \left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{4}{3}\right)$

最小値 **2**。 $(x,\ y,\ z)=(1,\ 1,\ 0),\ (0,\ 1,\ 1),\ (1,\ 0,\ 1)$