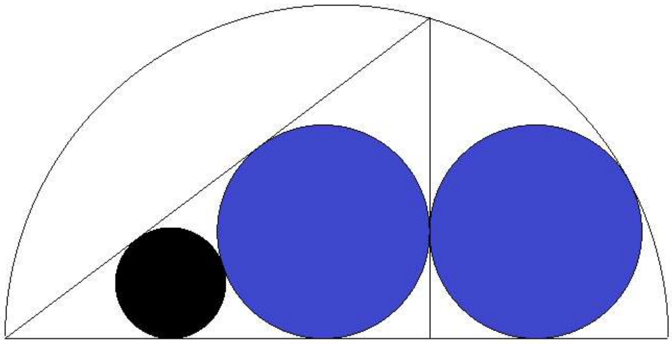
# 第417回

第22問題

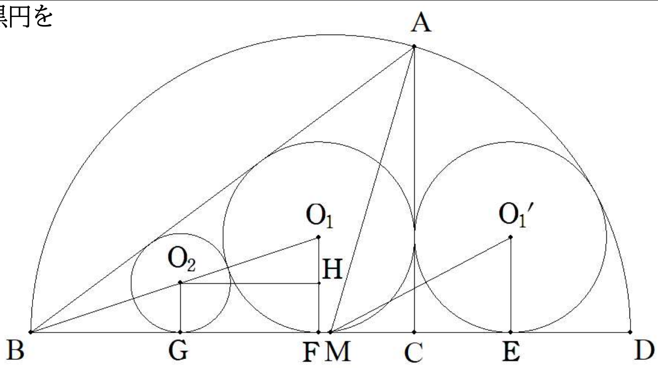
半円内に直角三角形を描き，その中へ
2等円（青）と黒円を容れる。
青円の直径を知って黒円の直径を求めよ。



術文（答）

　黒径$=\dfrac{11-\sqrt{40}}{9}$(青径)

解答　図のように記号を付け，半円，青円左，青円右，黒円をそれぞれ$\mathrm{M}(r)$，$\mathrm{O}_1(r_1)$，$\mathrm{O}_1'(r_1)$，$\mathrm{O}_2(r_2)$とおく。




BC$=a$，CA$=b$とおくと，三平方の定理により，

AB$=\sqrt{a^2+b^2}$

$r_1=\dfrac{a+b-\sqrt{a^2+b^2}}{2}$　…①

MC$=a-r$

△AMCに三平方の定理を適用すると，$(a-r)^2+b^2=r^2$

$\therefore r=\dfrac{a^2+b^2}{2a}$　…②

△O$_1'$MEに三平方の定理を適用すると，$(a-r+r_1)^2+r_1{}^2=(r-r_1)^2$　$a^2-2a(r-r_1)+r_1{}^2=0$

$\therefore (a+r_1)^2=2ar$

これに①，②を代入すると，$\left(a+\dfrac{a+b-\sqrt{a^2+b^2}}{2}\right)^2=2a\cdot\dfrac{a^2+b^2}{2a}$

両辺の平方根をとると，$\dfrac{3a+b-\sqrt{a^2+b^2}}{2}>0$であるから，$\dfrac{3a+b-\sqrt{a^2+b^2}}{2}=\sqrt{a^2+b^2}$

両辺に2を掛けて，移項すると，$3a+b=3\sqrt{a^2+b^2}$

両辺を2乗して整理すると，$2b(3a-4b)=0$　$b>0$より，$\dfrac{b}{a}=\dfrac{3}{4}$　$\therefore \tan B=\dfrac{3}{4}$　…③

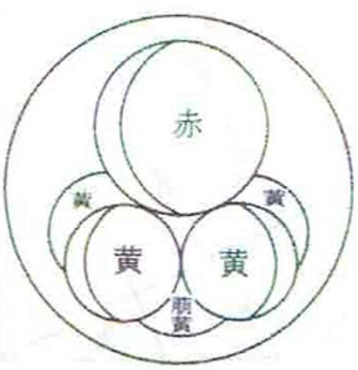
△O$_1$O$_2$Hにおいて，$\sin\dfrac{B}{2}=\dfrac{r_1-r_2}{r_1+r_2}$より，$r_2=\dfrac{1-\sin\dfrac{B}{2}}{1+\sin\dfrac{B}{2}}r_1$

ここで，③より，$\cos B=\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2 B}}=\dfrac{4}{5}$，$\sin\dfrac{B}{2}=\sqrt{\dfrac{1-\cos B}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$であるから，

$r_2=\dfrac{1-\dfrac{1}{\sqrt{10}}}{1+\dfrac{1}{\sqrt{10}}}r_1=\dfrac{11-2\sqrt{10}}{9}r_1=\dfrac{11-\sqrt{40}}{9}r_1$　よって，黒径$=\dfrac{11-\sqrt{40}}{9}$(青径)　答

第23問題

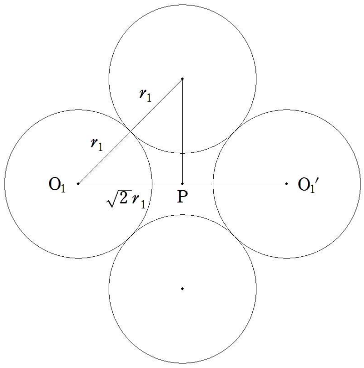
球内に互いに外接する4個の等球（黄）を容れその上下に赤球と萌黄球を容れる。赤球，萌黄球の直径を知って黄球の直径を求めよ。

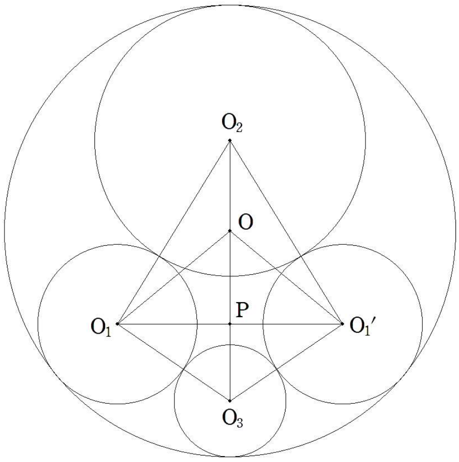



術文（答）

$$\text{黄球径}=\frac{2(\text{赤球径})(\text{萌黄径})}{(\text{赤球径})+(\text{萌黄径})}$$

解答　大球を $\mathrm{O}\,(R)$，向かい合う黄球を $\mathrm{O}_1\,(r_1)$，$\mathrm{O}_1{}'\,(r_1)$，赤球を $\mathrm{O}_2\,(r_2)$，萌黄球を $\mathrm{O}_3\,(r_3)$，$\mathrm{O}_1\mathrm{O}'$ と $\mathrm{O}_2\mathrm{O}_3$ の交点を P とし，$\mathrm{OP}=a$，$\mathrm{O_1P}=b$，$\mathrm{O_3P}=c$ とおく。




$\mathrm{O_1P}=b=\sqrt{2}\,r_1$　…①

$\mathrm{OO_3}=R-r_3=a+c$

$\therefore R=a+c+r_3$　…②

$\triangle\mathrm{OO_1P}$ に三平方の定理を適用すると，

$(R-r_1)^2=a^2+b^2$　…③

$\triangle\mathrm{O_2O_1P}$ に三平方の定理を適用すると，

$(r_1+r_2)^2=(R-r_2+a)^2+b^2$　…④

$\triangle\mathrm{O_3O_1P}$ に三平方の定理を適用すると，

$(r_1+r_3)^2=c^2+b^2$　…⑤

③，④，⑤に①，②を代入すると，
$$\begin{cases}(a+c+r_3-r_1)^2=a^2+2{r_1}^2 & \cdots ③'\\ (r_1+r_2)^2=(a+c+r_3-r_2+a)^2+2{r_1}^2 & \cdots ④'\\ (r_1+r_3)^2=c^2+2{r_1}^2 & \cdots ⑤'\end{cases}$$

これら3式から $a$，$c$ を消去する。

③′を $a$ について解くと，$a=\dfrac{2{r_1}^2-(c+r_3-r_1)^2}{2(c+r_3-r_1)}$

これを④′に代入すると，$(r_1+r_2)^2=\left\{2\cdot\dfrac{2{r_1}^2-(c+r_3-r_1)^2}{2(c+r_3-r_1)}+c+r_3-r_2\right\}^2+2{r_1}^2$

分母を払って $c$ について整理すると，$2r_1\cdot\{{r_1}^3+2r_1r_2r_3+r_1{r_3}^2-2r_2{r_3}^2+2(r_1r_2+r_1r_3-2r_2r_3)c+(r_1-2r_2)c^2\}=0$

$r_1>0$ であるから，${r_1}^3+2r_1r_2r_3+r_1{r_3}^2-2r_2{r_3}^2+2(r_1r_2+r_1r_3-2r_2r_3)c+(r_1-2r_2)c^2=0$

これに，⑤′からの $c^2=-{r_1}^2+2r_1r_3+{r_3}^2$ を代入すると，

${r_1}^3+2r_1r_2r_3+r_1{r_3}^2-2r_2{r_3}^2+2(r_1r_2+r_1r_3-2r_2r_3)c+(r_1-2r_2)(-{r_1}^2+2r_1r_3+{r_3}^2)=0$

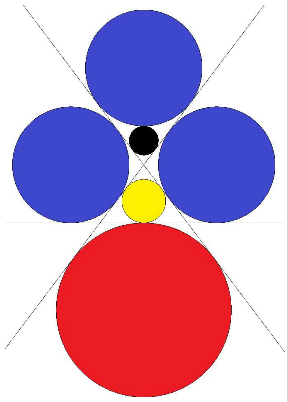
因数分解すると，$2(c+r_1+r_3)(r_1r_2+r_1r_3-2r_2r_3)=0$

$c+r_1+r_3>0$ より，$r_1r_2+r_1r_3-2r_2r_3=0$　$\therefore r_1=\dfrac{2r_2r_3}{r_2+r_3}$

よって，$\text{黄球径}=\dfrac{2(\text{赤球径})(\text{萌黄径})}{(\text{赤球径})+(\text{萌黄径})}$　答

第 24 問題

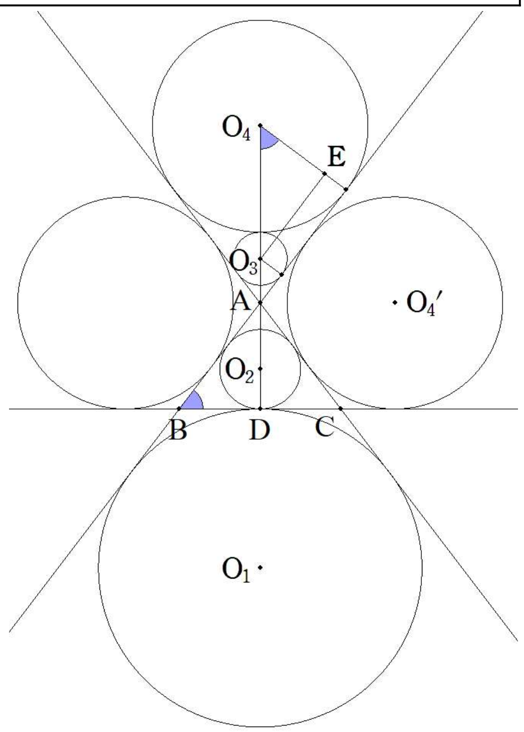
交わる 3 直線に 3 個の等円（青）と赤円，黄円，黒円が接している。黄円と黒円の直径を知って赤円の直径を求めよ。



術文（答）

$$赤径=\left(\frac{2黄径}{黒径}+1\right)(黄径)$$

解答　図のように記号を付けると，仮定により，△ABC は二等辺三角形になる。BC の中点を D とおく。




BC$=a$，CA$=$AB$=b$，△ABC$=S$ とおく。

三角形の周の長さの半分は，$s=\dfrac{a+2b}{2}$ である。

赤，黄，黒，青円をそれぞれ $O_1(r_1)$，$O_2(r_2)$，$O_3(r_3)$，$O_4(r_4)$，$O_4'(r_4)$ とおく。

$O_1$ は△ABC の∠A 内の傍心であるから，

$$r_1=\frac{S}{s-a}\quad (*1)\quad =\frac{S}{\dfrac{a+2b}{2}-a}=\frac{2S}{2b-a}$$

$O_2$ は△ABC の内心であるから，$r_2=\dfrac{S}{s}=\dfrac{S}{\dfrac{a+2b}{2}}=\dfrac{2S}{2b+a}$

$O_4'$ は△ABC の∠B 内の傍心であるから，$r_4=\dfrac{S}{s-b}=\dfrac{2S}{a}$

$\triangle O_3O_4E\backsim\triangle ABD$ であるから，$\dfrac{r_4-r_3}{r_4+r_3}=\dfrac{\frac{a}{2}}{b}$

$\therefore r_3=\dfrac{2b-a}{2b+a}r_4=\dfrac{2b-a}{2b+a}\cdot\dfrac{2S}{a}=\dfrac{2b-a}{a}r_2$ より，$\dfrac{2r_2}{r_3}=\dfrac{2a}{2b-a}$ である。

このとき，$\left(\dfrac{2黄径}{黒径}+1\right)(黄径)=\left(\dfrac{2\cdot 2r_2}{2r_3}+1\right)\cdot 2r_2=\left(\dfrac{2a}{2b-a}+1\right)\cdot 2\cdot\dfrac{2S}{2b+a}=2\cdot\dfrac{2S}{2b-a}=2r_1=$赤径

よって，$赤径=\left(\dfrac{2黄径}{黒径}+1\right)(黄径)$ が成り立つ。

(2022/8/21　ジョーカー)