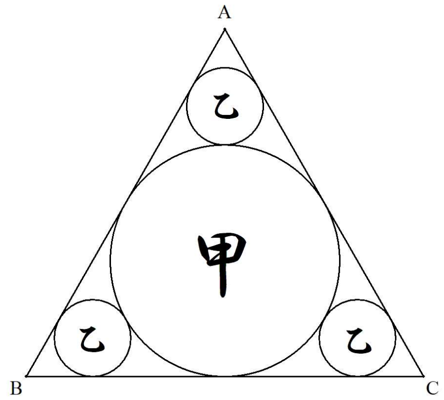
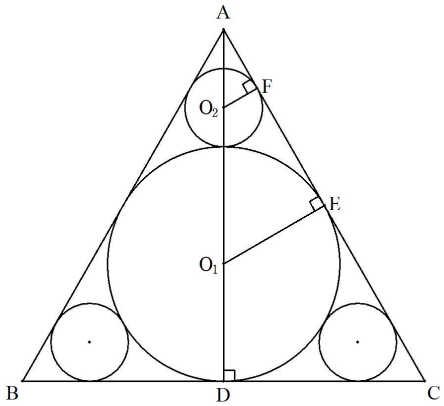
追加問題

1．A，B，Cは1辺の長さが1の正三角形の頂点である。
この図形の中に図のように互いに接する甲乙円を配置する。
甲乙円の半径をそれぞれ求めよ。



解答　甲乙円を $O_1(r_1)$，$O_2(r_2)$ とおき，図のように記号を付ける。



$\triangle AO_1E$ について，$\angle AO_1E=60^\circ$ であるから，$AO_1=2\,O_1E$

$AO_1=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-r_1$，$O_1E=r_1$ であるから，$\dfrac{\sqrt{3}}{2}-r_1=2r_1$　$\therefore r_1=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

$\triangle AO_2F$ について，$\angle AO_2F=60^\circ$ であるから，$AO_2=2\,O_2F=2r_2$

$AO_1=2r_2+r_2+r_1=2r_1$ より，$r_2=\dfrac{1}{3}r_1=\dfrac{\sqrt{3}}{18}$

よって，各円の半径は，甲：$\dfrac{\sqrt{3}}{6}$，乙：$\dfrac{\sqrt{3}}{18}$　答

2．$ax+by+cz=2$，$ax^2+by^2+cz^2=3$，$ax^3+by^3+cz^3=5$，$ax^4+by^4+cz^4=7$，
$ax^5+by^5+cz^5=11$，$ax^6+by^6+cz^6=13$ のとき，次の問いに答えよ。

(1)　$ax^7+by^7+cz^7$，$ax^8+by^8+cz^8$ の値をそれぞれ求めよ。

(2)　a，b，c，x，y，z の値を求めよ。

(3)　$ax^n+by^n+cz^n$ の値を n を用いて表せ。

解答

(1)　$a_n=ax^n+by^n+cz^n$　…①とおくと，与えられた6個の方程式は，

$a_1=2$，$a_2=3$，$a_3=5$，$a_4=7$，$a_5=11$，$a_6=13$ と同値である。

x，y，z を解にもつ3次方程式を $t^3+pt^2+qt+r=0$　…②とおくと，$x^3+px^2+qx+r=0$

両辺に ax^n を掛けると，$ax^{n+3}+pax^{n+2}+qax^{n+1}+rax^n=0$　…③

同様に，$y^3+py^2+qy+r=0$，$z^3+pz^2+qz+r=0$ であるから，

$by^{n+3}+pby^{n+2}+qby^{n+1}+rby^n=0$　…④，$cz^{n+3}+pcz^{n+2}+qcz^{n+1}+rcz^n=0$　…⑤

③，④，⑤を加えると，①より，$a_{n+3}+pa_{n+2}+qa_{n+1}+ra_n=0$　…⑥

⑥に $n=1$ を代入すると，$a_4+pa_3+qa_2+ra_1=0$　$\therefore 7+5p+3q+2r=0$　…⑦

⑥に $n=2$ を代入すると，$a_5+pa_4+qa_3+ra_2=0$　$\therefore 11+7p+5q+3r=0$　…⑧

⑥に $n=3$ を代入すると，$a_6+pa_5+qa_4+ra_3=0$　$\therefore 13+11p+7q+5r=0$　…⑨

⑦，⑧，⑨を連立させて解くと，$p=-2$，$q=-3$，$r=6$

このとき⑥は，$a_{n+3}-2a_{n+2}-3a_{n+1}+6a_n=0$　$\therefore a_{n+3}=2a_{n+2}+3a_{n+1}-6a_n$　…⑥′

⑥′に $n=4$ を代入すると，$ax^7+by^7+cz^7=a_7=2a_6+3a_5-6a_4=2\cdot13+3\cdot11-6\cdot7=17$　答

⑥′に $n=5$ を代入すると，$ax^8+by^8+cz^8=a_8=2a_7+3a_6-6a_5=2\cdot17+3\cdot13-6\cdot11=7$　答

⑵　②に $p=-2$，$q=-3$，$r=6$ を代入すると，$t^3-2t^2-3t+6=0$　$(t-2)(t^2-3)=0$　$\therefore t=2,\ \pm\sqrt{3}$

よって，$\{x,\ y,\ z\}=\{2,\ \sqrt{3},\ -\sqrt{3}\}$　$(x,\ y,\ z)$の組合せは $3!=6$ 通りある。

今，$x=2$，$y=\sqrt{3}$，$z=-\sqrt{3}$ とおくと，①は，$a_n=a\cdot2^n+b(\sqrt{3})^n+c(-\sqrt{3})^n$　…①′と表される。

$a_1=2a+\sqrt{3}b-\sqrt{3}c=2$，$a_2=4a+3b+3c=3$，$a_3=8a+3\sqrt{3}b-3\sqrt{3}c=5$ を連立させて解くと，

$a=-\dfrac{1}{2}$，$b=\dfrac{5+3\sqrt{3}}{6}$，$c=\dfrac{5-3\sqrt{3}}{6}$

よって，$(a,\ b,\ c,\ x,\ y,\ z)=$

$\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{5+3\sqrt{3}}{6},\ \dfrac{5-3\sqrt{3}}{6},\ 2,\ \sqrt{3},\ -\sqrt{3}\right)$，$\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{5-3\sqrt{3}}{6},\ \dfrac{5+3\sqrt{3}}{6},\ 2,\ -\sqrt{3},\ \sqrt{3}\right)$，

$\left(\dfrac{5+3\sqrt{3}}{6},\ \dfrac{5-3\sqrt{3}}{6},\ -\dfrac{1}{2},\sqrt{3},\ -\sqrt{3},\ 2\right)$，$\left(\dfrac{5+3\sqrt{3}}{6},\ -\dfrac{1}{2},\ \dfrac{5-3\sqrt{3}}{6},\sqrt{3},\ 2,\ -\sqrt{3}\right)$，

$\left(\dfrac{5-3\sqrt{3}}{6},\ -\dfrac{1}{2},\ \dfrac{5+3\sqrt{3}}{6},\ -\sqrt{3},\ 2,\ \sqrt{3}\right)$，$\left(\dfrac{5-3\sqrt{3}}{6},\ \dfrac{5+3\sqrt{3}}{6},\ -\dfrac{1}{2},\ -\sqrt{3},\ \sqrt{3},\ 2\right)$　答

⑶　①′より，

$a_n=-\dfrac{1}{2}\cdot2^n+\dfrac{5+3\sqrt{3}}{6}(\sqrt{3})^n+\dfrac{5-3\sqrt{3}}{6}(-\sqrt{3})^n=-2^{n-1}+\dfrac{9+5\sqrt{3}}{6}(\sqrt{3})^{n-1}+\dfrac{9-5\sqrt{3}}{6}(-\sqrt{3})^{n-1}$　答

補足

$a_7=17$，$a_8=7$，$a_9=-13$，$a_{10}=-107$，$a_{11}=-295$，-833，-1909，…

$a_0=\dfrac{7}{6}$，$a_{-1}=\dfrac{3}{4}$，$a_{-2}=\dfrac{31}{72}$，$a_{-3}=\dfrac{13}{48}$，$a_{-4}=\dfrac{133}{864}$，…

(2022/8/21　ジョーカー)