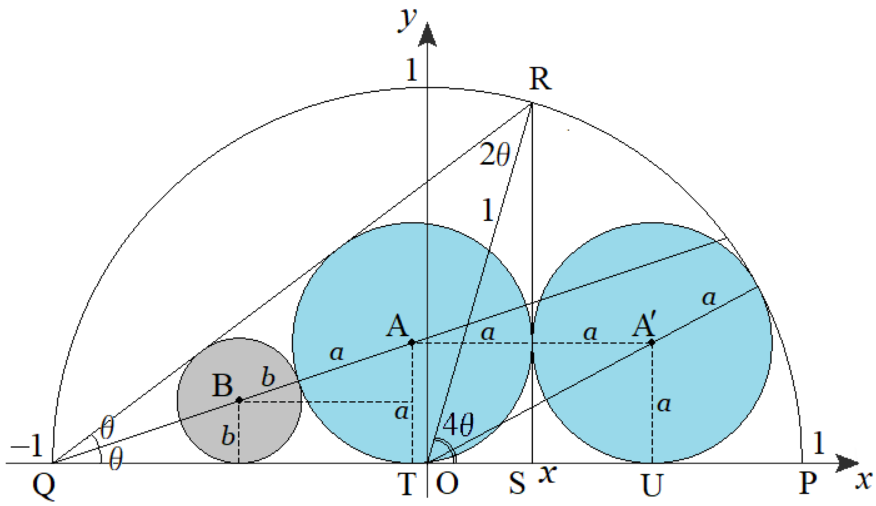
● 問題 417 解答＜三角定規＞

[第22問題]

図のように座標および各点を定める。



円 A, B の半径を a, b,

$\angle$ AQO $= \theta$　とすると

$$(a+b)\sin\theta = a-b$$

$$\therefore\ \left(1+\frac{b}{a}\right)\sin\theta = 1-\frac{b}{a}$$

$$\therefore\ \frac{b}{a} = \frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta} \quad \cdots①$$

このとき，点 S の座標 x は

$$x = \cos 4\theta = 2\cos^2 2\theta - 1 \cdots②$$

また，△AQT について，　AT ＝ QT $\tan\theta$

$$\therefore\ a = (x+1-a)\tan\theta \quad \cdots③$$

つぎに，△A′OU は直角三角形で，$OA'^2 = OT^2 + A'U^2$

$$\therefore\ (1-a)^2 = (x+a)^2 + a^2$$

a について整理して　$a^2 + 2(x+1)a + x^2 - 1 = 0$

これを解いて　$a = -x-1+\sqrt{2x+2}$　$\cdots④$

③に④を代入し，　$\tan\theta = \dfrac{-x-1+\sqrt{2x+2}}{2x+2-\sqrt{2x+2}}$　$\cdots⑤$

$x+1=u$ とおき，⑤$= \dfrac{-u+\sqrt{2u}}{2u-\sqrt{2u}} = \dfrac{-\sqrt{u}+\sqrt{2}}{2\sqrt{u}-\sqrt{2}} = \tan\theta$

これを $\sqrt{u}$ について解いて　$\sqrt{u} = \dfrac{\sqrt{2}(\tan\theta+1)}{2\tan\theta+1}$　$\cdots⑥$

両辺を平方し　$u = 2\left(\dfrac{\tan\theta+1}{2\tan\theta+1}\right)^2 = x+1 = 2\cos^2 2\theta$　(∵②)

$$\therefore\ \frac{\tan\theta+1}{2\tan\theta+1} = \cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = \frac{2}{\tan^2\theta+1} - 1 = \frac{1-\tan^2\theta}{\tan^2\theta+1}$$

これを整理し　$\tan\theta(3\tan\theta-1)=0$　$\therefore\ \tan\theta = \dfrac{1}{3}$　$\cdots⑦$

このとき　$\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$　$\cdots⑧$

⑦を①に戻して，　$\dfrac{b}{a} = \dfrac{1-1/\sqrt{10}}{1+1/\sqrt{10}} = \dfrac{\sqrt{10}-1}{\sqrt{10}+1} = \dfrac{11-2\sqrt{10}}{9}$

以上より，　**黒径＝$\dfrac{11-\sqrt{40}}{9}$青径**　…[答]

求められてはいないが，$a = \dfrac{8}{25}$，$b = \dfrac{8(11-2\sqrt{10})}{225}$，$x = \dfrac{7}{25}$　である。

[第24問題]

右図のように, 黒, 青, 黄, 赤各円の半径を a, b, c, r とする。また各円の接線を l_1, l_2, l_3 とすると, 図の対称性から, l_1 と l_2 は直交し, l_3 は他と 45° で交わる。

黒円と青円の関係から　$b+a=\sqrt{2}\,(b-a)$

$$\therefore\ b=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}a=(3+2\sqrt{2})a \quad \cdots①$$

青円と黄円の関係から　$b-c=(b+c)\tan 22.5°$

$$\therefore\ b-c=(\sqrt{2}-1)(b+c) \quad \therefore\ b=(\sqrt{2}+1)c \quad \cdots②$$

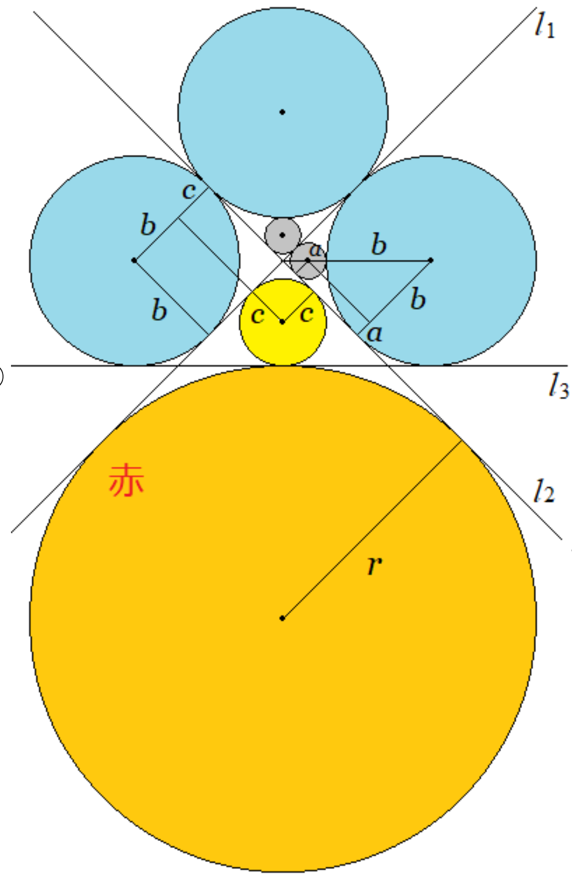
$$\frac{②}{①}:\ c=(\sqrt{2}+1)a \quad \cdots③$$

①③より　$b=2c+a$　…④

また, 黒青円と黄赤円は相似だから　$a:b=c:r$

$$\therefore\ r=\frac{b}{a}\cdot c=\frac{2c+a}{a}\cdot c=\left(\frac{2c}{a}+1\right)c \quad (\because ④)$$

以上より　赤径$=\left(\dfrac{\textbf{2黄径}}{\textbf{黒径}}\mathbf{+1}\right)$**・黄径**　…[答]



[追加問題１]

正三角形の 1 辺が 1 のとき，各部の長さは右図のようになり, また甲円と乙円の相似比は 1：3 だから

$$\text{甲円の半径}=\frac{\sqrt{3}}{6},\ \text{乙円の半径}=\frac{\sqrt{3}}{18} \quad \cdots[\text{答}]$$