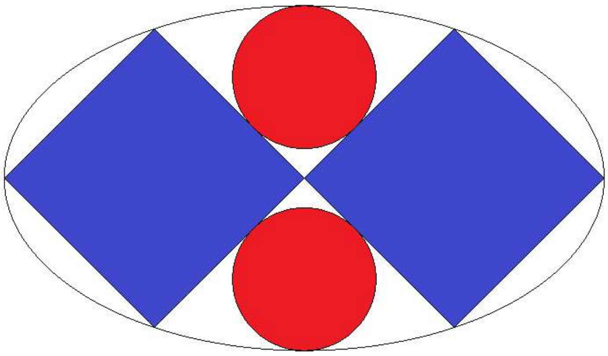
第418回

第 25 問題

楕円内に 2 個の等しい正方形を描き，その内へ赤円 2 個を容れる。

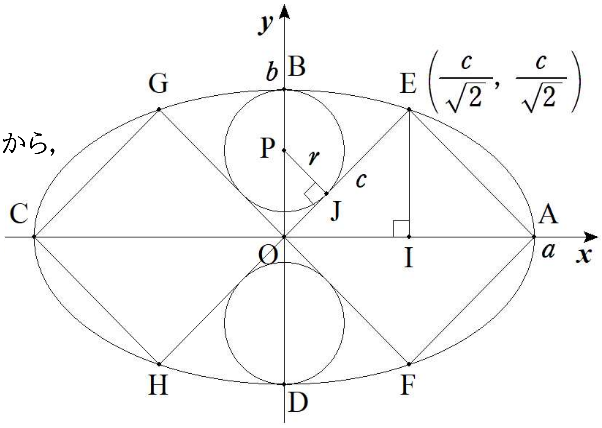
正方形の一辺を知って赤円の直径を求めよ。



術文（答）

赤径＝$\dfrac{\sqrt{48}-\sqrt{24}}{3}$(一辺)

解答　与えられた図形を座標平面において考える。



楕円の方程式を $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$　…①とおく。

正方形の一辺を c とおくと，△OIE は直角二等辺三角形であるから，

OI＝$\dfrac{c}{\sqrt{2}}$，E$\left(\dfrac{c}{\sqrt{2}},\ \dfrac{c}{\sqrt{2}}\right)$，OA＝$\sqrt{2}c=a$　…②

E は①上の点であるから，$\dfrac{\left(\dfrac{c}{\sqrt{2}}\right)^2}{a^2}+\dfrac{\left(\dfrac{c}{\sqrt{2}}\right)^2}{b^2}=1$

$\dfrac{c^2}{2}=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}$　$\therefore\ c^2=\dfrac{2a^2b^2}{a^2+b^2}$

これに②を代入すると，$c^2=\dfrac{2\cdot 2c^2b^2}{2c^2+b^2}$　$2c^2=3b^2$　$\therefore\ b=\dfrac{\sqrt{6}}{3}c$　…③

赤円の半径を r とおくと，△OJP は直角二等辺三角形であるから，OP＝$b-r=\sqrt{2}r$　$\therefore\ b=(\sqrt{2}+1)r$　…④

③，④より，$(\sqrt{2}+1)r=\dfrac{\sqrt{6}}{3}c$　$r=\dfrac{\sqrt{6}}{3(\sqrt{2}+1)}c=\dfrac{\sqrt{6}(\sqrt{2}-1)}{3}c$

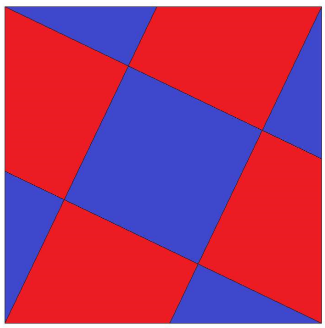
よって赤径は，$2r=\dfrac{2\sqrt{6}(\sqrt{2}-1)}{3}c=\dfrac{\sqrt{48}-\sqrt{24}}{3}c$　*i.e.*　赤径＝$\dfrac{\sqrt{48}-\sqrt{24}}{3}$(一辺)　答

第 26 問題

与えられた正方形の各頂点を通り平行な 2 組の直線を引いて，

青赤に正方形を分ける。

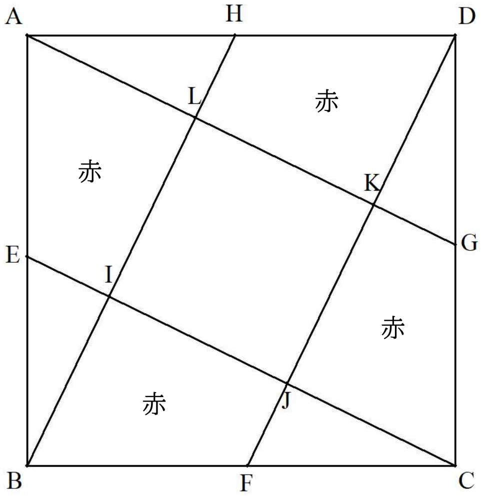
そして赤の面積を最大にせよ。



術文（答）

赤面積＝$\sqrt{\sqrt{500}-22}$(正方形の面積)

解答　右図のように与えられた正方形を座標平面上に置き，記号を付ける。



正方形の一辺を a とし，EB＝FC＝GD＝HA＝ b とおく。

△ABHについて，三平方の定理により，BH＝ $\sqrt{a^2+b^2}$

△ABH∽△LBA∽△LAH，△LAH≡△IBE より，

AL＝BI＝ $\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$，BL＝ $\dfrac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$，

LH＝IE＝ $\dfrac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$ であるから，

四角形 AEIL＝△ABL－△EBI＝ $\dfrac{1}{2}$ AL・BL－ $\dfrac{1}{2}$ BL・IE

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$=\frac{ab(a^2-b^2)}{2(a^2+b^2)}$$

赤面積＝四角形 AEIL× 4 ＝ $\dfrac{2ab(a^2-b^2)}{a^2+b^2}=\dfrac{2a^2\cdot\frac{b}{a}\left\{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2\right\}}{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}$

$\dfrac{b}{a}=x$ とおくと（$0<x<1$），赤面積＝ $\dfrac{2a^2x(1-x^2)}{1+x^2}=f(x)$ とおく。

$f'(x)=\dfrac{2a^2\{(1+x^2)(1-3x)-x(1-x^2)\cdot 2x\}}{(1+x^2)^2}=\dfrac{2a^2(1-4x^2-x^4)}{(1+x^2)^2}=0$ とおくと，$x^2=-2\pm\sqrt{5}$

$x^2>0$ より，$x^2=-2+\sqrt{5}$　$x>0$ より，$x=\sqrt{\sqrt{5}-2}$（$\fallingdotseq 0.486$）

$f'(x)=-\dfrac{2a^2(x-\sqrt{\sqrt{5}-2})(x+\sqrt{\sqrt{5}-2})(x^2+2+\sqrt{5})}{(1+x^2)^2}$ より，

$x<\sqrt{\sqrt{5}-2}$ のとき，$f'(x)>0$，

$x>\sqrt{\sqrt{5}-2}$ のとき，$f'(x)<0$ であるから，$f(x)$ は $x=\sqrt{\sqrt{5}-2}$ のとき，極大かつ最大となる。

最大値は，$f(\sqrt{\sqrt{5}-2})=\dfrac{2a^2\sqrt{\sqrt{5}-2}\{1-(\sqrt{5}-2)\}}{1+(\sqrt{5}-2)}=\dfrac{2a^2\sqrt{\sqrt{5}-2}(3-\sqrt{5})(\sqrt{5}+1)}{4}$

$$=(\sqrt{5}-1)\sqrt{\sqrt{5}-2}\,a^2=\sqrt{10\sqrt{5}-22}\,a^2=\sqrt{\sqrt{500}-22}\,a^2$$

よって，赤面積＝ $\sqrt{\sqrt{500}-22}$（正方形の面積）　答

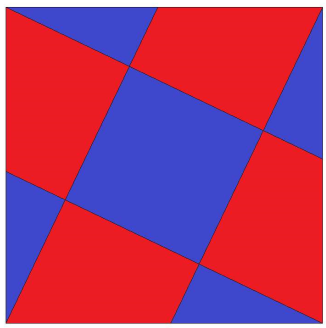
補足　$\sqrt{\sqrt{5}-2}$（$\fallingdotseq 0.485868$），$\sqrt{\sqrt{500}-22}\fallingdotseq 0.6005655$

第 26 問題

与えられた正方形の各頂点を通り平行な２組の直線を引いて，

青赤に正方形を分ける。

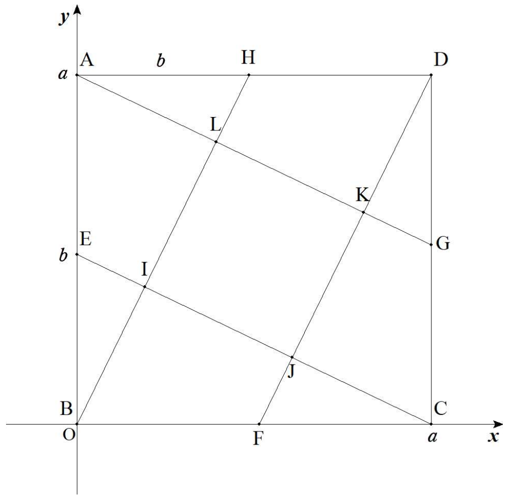
そして赤の面積を最大にせよ。



術文（答）

赤面積＝ $\sqrt{\sqrt{500}-22}$（正方形の面積）

解答　右図のように与えられた正方形を座標平面上に置き，記号を付ける。



正方形の一辺を a とし，$\mathrm{A}(0,\ a)$，$\mathrm{E}(0,\ b)$ とおく。

直線 BH の方程式は，$y=\dfrac{a}{b}x$　…①

直線 EC の方程式は，$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$　$\therefore\ y=-\dfrac{b}{a}x+b$　…②

直線 AG の方程式は，$y=-\dfrac{b}{a}x+a$　…③

①と②の交点 $\mathrm{I}\left(\dfrac{ab^2}{a^2+b^2},\ \dfrac{a^2b}{a^2+b^2}\right)$

①と③の交点 $\mathrm{L}\left(\dfrac{a^2b}{a^2+b^2},\ \dfrac{a^3}{a^2+b^2}\right)$

$$\text{四角形AEIL}=\triangle\mathrm{ABL}-\triangle\mathrm{EBI}=\frac{1}{2}a\cdot\frac{a^2b}{a^2+b^2}-\frac{1}{2}b\cdot\frac{ab^2}{a^2+b^2}=\frac{ab(a^2-b^2)}{2(a^2+b^2)}$$

$$\text{赤面積}=\text{四角形AEIL}\times 4=\frac{2ab(a^2-b^2)}{a^2+b^2}=\frac{2a^2\cdot\dfrac{b}{a}\left\{1-\left(\dfrac{b}{a}\right)^2\right\}}{1+\left(\dfrac{b}{a}\right)^2}$$

$\dfrac{b}{a}=x$ とおくと（$0<x<1$），赤面積$=\dfrac{2a^2x(1-x^2)}{1+x^2}=f(x)$ とおく。

$$f'(x)=\frac{2a^2\{(1+x^2)(1-3x)-x(1-x^2)\cdot 2x\}}{(1+x^2)^2}=\frac{2a^2(1-4x^2-x^4)}{(1+x^2)^2}=0$$ とおくと，$x^2=-2\pm\sqrt{5}$

$x^2>0$ より，$x^2=-2+\sqrt{5}$　$x>0$ より，$x=\sqrt{\sqrt{5}-2}$（$\fallingdotseq 0.486$）

$$f'(x)=-\frac{2a^2\left(x-\sqrt{\sqrt{5}-2}\right)\left(x+\sqrt{\sqrt{5}-2}\right)\left(x^2+2+\sqrt{5}\right)}{(1+x^2)^2}$$ より，

$x<\sqrt{\sqrt{5}-2}$ のとき，$f'(x)>0$，

$x>\sqrt{\sqrt{5}-2}$ のとき，$f'(x)<0$ であるから，$f(x)$ は $x=\sqrt{\sqrt{5}-2}$ のとき，極大かつ最大となる。

$$\text{最大値は，}f\left(\sqrt{\sqrt{5}-2}\right)=\frac{2a^2\sqrt{\sqrt{5}-2}\{1-(\sqrt{5}-2)\}}{1+(\sqrt{5}-2)}=\frac{2a^2\sqrt{\sqrt{5}-2}(3-\sqrt{5})(\sqrt{5}+1)}{4}$$

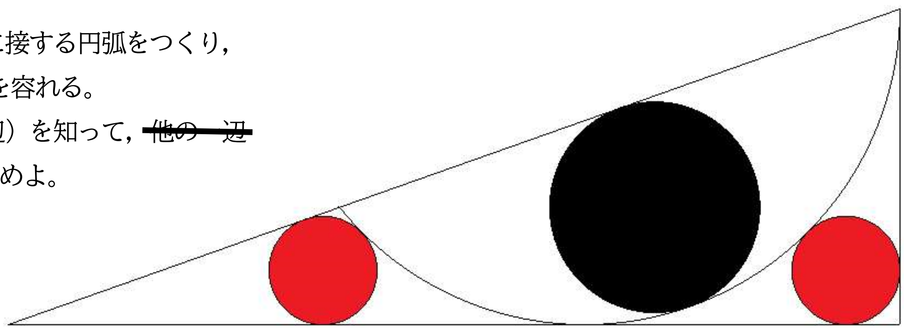
$$=(\sqrt{5}-1)\sqrt{\sqrt{5}-2}\,a^2=\sqrt{10\sqrt{5}-22}\,a^2=\sqrt{\sqrt{500}-22}\,a^2$$

よって，赤面積$=\sqrt{\sqrt{500}-22}$(正方形の面積)　答

補足　$\sqrt{\sqrt{5}-2}$（$\fallingdotseq 0.485868$），$\sqrt{\sqrt{500}-22}\fallingdotseq 0.6005655$

第27問題

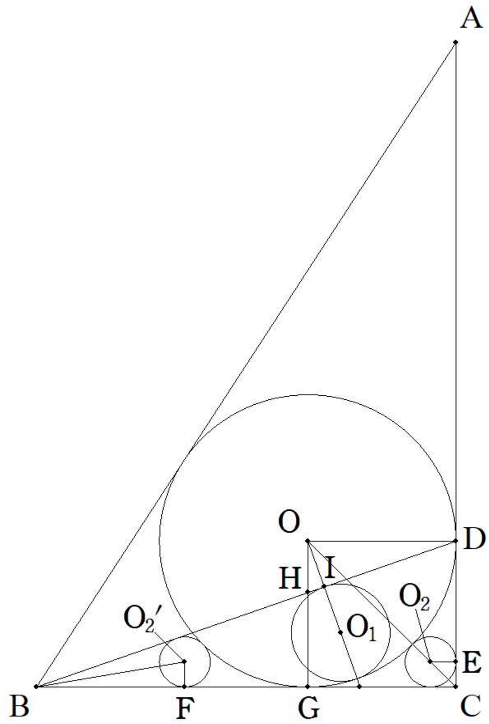
直角三角形の直角をはさむ二辺に接する円弧をつくり，
その中に黒円と2個の等円（赤）を容れる。
鈎（直角のはさむ小さい方の一辺）を知って，~~他の一辺股を最小にするとき，~~黒円径を求めよ。



術文（答）

黒円径$=\dfrac{2}{3}$(鈎)

$\boxed{\text{解答}}$　図のように記号を付ける。



△ABCについて，BC$=a$，CA$=b$，AB$=c$とおく。$c=\sqrt{a^2+b^2}$

円弧O(r)は，△ABCの内接円である。$r=\dfrac{a+b-\sqrt{a^2+b^2}}{2}$　…①

黒円$O_1(r_1)$，右赤円$O_2(r_2)$，左赤円$O_2'(r_2)$とおく。

△OCDは直角二等辺三角形であるから，

OC$=r+r_2+\sqrt{2}r_2=\sqrt{2}r$　$\therefore r_2=(\sqrt{2}-1)^2r=(3-2\sqrt{2})r$　…②

$\angle$DBC$=2\theta$とおくと，

$\tan 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\dfrac{r}{a}$より，$\tan\theta=\dfrac{-a\pm\sqrt{a^2+r^2}}{r}$

$\tan\theta>0$より，$\tan\theta=\dfrac{-a+\sqrt{a^2+r^2}}{r}=\dfrac{r}{a+\sqrt{a^2+r^2}}$

BC$=$BF$+$FG$+$GC$=a$

これに，BF$=\dfrac{r_2}{\tan\theta}=\dfrac{a+\sqrt{a^2+r^2}}{r}\cdot r_2$，FG$=2\sqrt{rr_1}$，

GC$=r$を代入すると，$\dfrac{a+\sqrt{a^2+r^2}}{r}\cdot r_2+2\sqrt{rr_2}+r=a$

これに②を代入すると，$\dfrac{a+\sqrt{a^2+r^2}}{r}\cdot(3-2\sqrt{2})r+2\sqrt{r\cdot(\sqrt{2}-1)^2r}+r=a$

整理すると，$\sqrt{a^2+r^2}=(2+2\sqrt{2})a-(5+4\sqrt{2})r$

両辺を2乗して移項すると，$(11+8\sqrt{2})a^2-4(13+9\sqrt{2})ar+8(7+5\sqrt{2})r^2=0$

両辺に$\dfrac{5\sqrt{2}-7}{a^2}$を掛け，$\dfrac{r}{a}=x$とおくと，$8x^2-4(1+2\sqrt{2})x+3-\sqrt{2}=0$

$8\left(x-\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)\left(x-\dfrac{-2+3\sqrt{2}}{4}\right)=0$　$\therefore x=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，$\dfrac{-2+3\sqrt{2}}{4}$

[1]　$x=\dfrac{-2+3\sqrt{2}}{4}$のとき，$\dfrac{r}{a}=\dfrac{-2+3\sqrt{2}}{4}$より，①を代入すると，$\dfrac{a+b-\sqrt{a^2+b^2}}{2a}=\dfrac{-2+3\sqrt{2}}{4}$

$\therefore \dfrac{b}{a}=-\dfrac{3(4+\sqrt{2})}{4}<0$より，不適

[2]　$x=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$のとき，$\dfrac{r}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$より，①を代入すると，$\dfrac{a+b-\sqrt{a^2+b^2}}{2a}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$　$\therefore \dfrac{b}{a}=\dfrac{2+3\sqrt{2}}{4}$（適）

$a=4k=$BCのとき，$r=\sqrt{2}k=$CD$=$ODより，三平方の定理により，BD$=\sqrt{(4k)^2+(\sqrt{2}k)^2}=3\sqrt{2}k$である。

△DOH∽△BCDより，OD：BC$=$OH：CD　$\sqrt{2}k:4k=OH:\sqrt{2}k$　$\therefore$OH$=\dfrac{1}{2}k$

△OIH∽△BCDより，OH：BD$=$OI：BC　$\dfrac{1}{2}k:3\sqrt{2}k=OI:4k$　OI$=\dfrac{\sqrt{2}}{3}k$

$2r_1=r-$OI$=\sqrt{2}k-\dfrac{\sqrt{2}}{3}k=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}k=\dfrac{2}{3}$CD　よって，黒径$=\dfrac{2}{3}$(鈎)　$\boxed{\text{答}}$

(2022/9/19　ジョーカー)