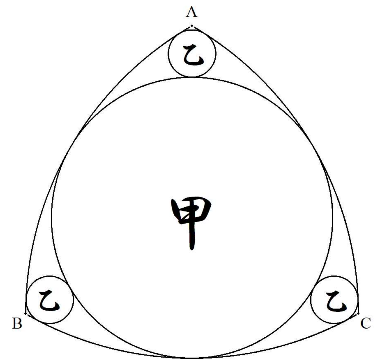
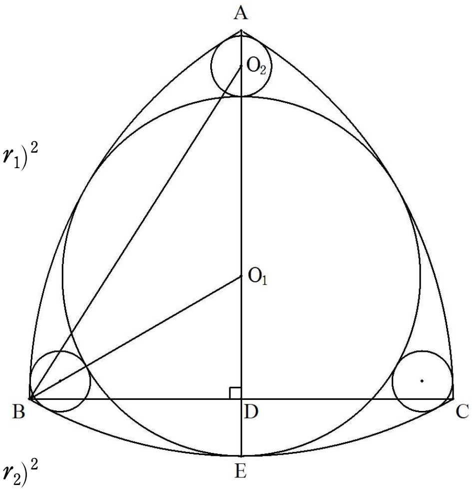
第 418 回追加問題

1．A，B，C は 1 辺の長さが 1 の正三角形の頂点で，
弧 AB，弧 BC，弧 CA は半径 1 の円弧である。
この図形の中に図のように互いに接する甲乙円を
配置する。
甲乙円の半径をそれぞれ求めよ。



解答　甲乙円を $O_1(r_1)$，$O_2(r_2)$ とおき，図のように記号を付ける。



$DE=1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ であるから，$O_1D=r_1-1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\triangle O_1BD$ に三平方の定理を適用すると，$\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(r_1-1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=(1-r_1)^2$

$\dfrac{1}{4}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(2-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-2r_1\right)$　$\therefore r_1=\dfrac{3-\sqrt{3}}{3}$　（$\fallingdotseq 0.42265$）

次に，$O_2D=r_2+r_1+r_1-1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}=r_2+2r_1-1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

これに，$r_1=\dfrac{3-\sqrt{3}}{3}$ を代入すると，$O_2D=r_2+\dfrac{6-\sqrt{3}}{6}$

$\triangle O_2BD$ に三平方の定理を適用すると，$\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(r_2+\dfrac{6-\sqrt{3}}{6}\right)^2=(1-r_2)^2$

$\dfrac{1}{4}=\dfrac{12-\sqrt{3}}{6}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{6}-2r_2\right)$　$\therefore r_2=\dfrac{\sqrt{3}-1}{12-\sqrt{3}}=\dfrac{11\sqrt{3}-9}{141}$　（$\fallingdotseq 0.0712947$）

よって，各円の半径は，甲：$\dfrac{3-\sqrt{3}}{3}$，乙：$\dfrac{11\sqrt{3}-9}{141}$　答

2．次の不等式を解け。ただし，$[x]$はxを超えない最大の整数を表すものとする。（$[x]$はガウス記号である。）

(1)　$[x]^2-3x+2<0$

(2)　$[x^2]-3x+2<0$

解答

(1)　$y=[x]^2-3x+2<0$ とおく。

(a)　$x<0$ のとき，$y<0$ となることはない。

(b)　$0\leqq x<1$ のとき，$[x]=0$　　$-3x+2<0$ より，$x>\dfrac{2}{3}$　　$\therefore \dfrac{2}{3}<x<1$

(c)　$x\geqq 1$ のとき，$0\leqq x-1<[x]\leqq x$ より，$x^2-5x+3<y\leqq x^2-3x+2$

$y_1=x^2-5x+3$，$y_2=x^2-3x+2$ とおく。

$y_1\geqq 0$ のとき，$y<0$ となることはない。

$y_2<0$ のとき，すなわち $1<x<2$ のとき，$y<0$ となる。

故に，$x\geqq 1$ かつ $y_1<0$ かつ $y_2\geqq 0$ なる場合 $i.e.$ $2\leqq x<\dfrac{5+\sqrt{13}}{2}$ のときを調べる。

（ア）$2\leqq x>3$ のとき，$[x]=2$　$\therefore 2^2-3x+2<0$ より，$x>2$　$\therefore 2<x<3$

（イ）$3\leqq x<4$ のとき，$[x]=3$　$\therefore 3^2-3x+2<0$ より，$x>\dfrac{11}{3}$　$\therefore \dfrac{11}{3}<x<4$

（ウ）$4\leqq x<\dfrac{5+\sqrt{13}}{2}$ のとき，$[x]=4$　$\therefore 4^2-3x+2<0$ より，$x>6$　$\therefore$ 解なし

以上，(a)，(b)，(c)より，$\dfrac{2}{3}<x<1$，$1<x<2$，$2<x<3$，$\dfrac{11}{3}<x<4$　答

(2)　$y=[x^2]-3x+2<0$ とおく。

$x^2-1<[x^2]\leqq x^2$ より，$x^2-3x+1<y\leqq x^2-3x+2$

$y_1=x^2-3x+1$，$y_2=x^2-3x+2$ とおく。

(a)　$y_1\geqq 0$ のとき，$y<0$ となることはない。

(b)　$y_2<0$ のとき，$i.e.$ $1<x<2$ のとき，$y<0$

(c)　$y_1<0$ かつ $y_2\geqq 0$ のとき，$i.e.$ $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}<x\leqq 1$，$2\leqq x<\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ のとき，

（ア）$\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}<x<1$ のとき，$[x^2]=0$　$\therefore -3x+2<0$ より，$x>\dfrac{2}{3}$　$\therefore \dfrac{2}{3}<x<1$

（イ）$x=1$ のとき，$1-3+2=0$ より，不適

（ウ）$2\leqq x<\sqrt{5}$ のとき，$[x^2]=4$　$\therefore 4-3x+2<0$ より，$x>2$　$\therefore 2<x<\sqrt{5}$

（エ）$\sqrt{5}\leqq x<\sqrt{6}$ のとき，$[x^2]=5$　$\therefore 5-3x+2<0$ より，$x>\dfrac{7}{3}$　$\therefore \dfrac{7}{3}<x<\sqrt{6}$

（オ）$\sqrt{6}\leqq x<\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}<\sqrt{7}$ のとき，$[x^2]=6$　$\therefore 6-3x+2<0$ より，$x>\dfrac{8}{3}$　$\therefore$ 解なし

以上より，$\dfrac{2}{3}<x<1$，$1<x<2$，$2<x<\sqrt{5}$，$\dfrac{7}{3}<x<\sqrt{6}$　答

(2022/9/18　ジョーカー)